2012 第1期

数学教学

SHUXUE JIAOXUE 中华人民共和国教育部主管

ISSN 0488-7387



基于探究的《无穷等比数列各项和》教学设计

200081　上海市虹口区教师进修学院　李家齐

《无穷等比数列各项的和》这一节的内容, 是安排在学习极限后进行的. 在教学实践中, 我们往往直接告诉学生用无穷等比数列前n项的和S_n的极限值, 作为无穷等比数列各项的和S, 即$S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$. 整个教学过程, 以知识的解析为主, 注重无穷等比数列有各项和的条件的教学, 即$-1<q<1$且$q\neq0$. 有的课堂也能从引入上下功夫, 以一些比较有趣的, 能引起学生兴趣的素材进行引入教学. 所有这些我们不否认它的价值, 实际上也是相当有必要的.

二期课改的教学理念, 重视知识的发生发展过程, 注重解决问题能力的形成, 强调创新能力的培养, 要达到这一教学目标, 必须重视探究的环节, 在学习知识的同时培养各种能力. 基于探究的考虑, 提出对《无穷等比数列各项的和》教学设计如下, 仅考参考.

1. 引入环节的探究

1.1 在引入的教学环节中, 我们设计以下问题

小学和初中阶段我们学习了有理数的四则运算, 我们还知道有理数可分为整数和分数, 而分数可化为有限小数或无限循环小数, 比如: $\frac{1}{2}=0.5$, $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$, $\frac{8}{9}=0.\dot{8}$. 那么你能计算以下问题吗? $0.\dot{3}+0.\dot{7}$; $0.\dot{3}-0.\dot{7}$; $0.\dot{3}\times0.\dot{7}$; $0.\dot{3}\div0.\dot{7}$.

若能将无限循环小数化为分数, 上面的计算就能进行, 那么又如何将无限循环小数化为分数呢? 我们先看无限循环小数的意义, 比如$0.\dot{3}$的意义就是$0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots+\underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3+\cdots$, 这实际上就是无穷等比数列$0.3, 0.03, 0.003, \cdots, \underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3, \cdots$的各项的和. 那么如何求无穷等比数列的各项和呢? 这就是我们要探究的问题, 从而引出课题.

1.2 思考

有理数的运算是数学的基础内容, 在学习"无穷等比数列各项和"之前, 这个问题实际上是没有得到完全解决, 就从运算角度来说我们无法将类似$0.\dot{3}+0.\dot{7}$计算出一个结果, 即结果是怎样的一个有理数. 我们也完全理解学生存在的疑惑$0.\dot{3}+0.\dot{7}$结果是不是一个有理数? 从重要的内容出发进行思考, 从看似解决了的问题进行思考, 可以引发得到探究的素材, 找到探究的方向, 也就是要探究求无穷等比数列的各项和.

如果学生会求无穷等比数列各项的和, 那么对任意两个有理数的四则运算, 才能算出一个结果. 这时的学生才算真正会进行有理数的四则运算, 也才能理解有理数四则运算的封闭性. 因此这种引入的探究不仅有现实意义, 也与新课的教学内容十分贴切.

2. 公式推导的探究

2.1 推导方法的探究

在课堂教学中, 我们让学生从具体的问题入手, 从多角度进行思考寻求无穷等比数列各项和的推导方法, 探究解决问题的途径.

探究1: 假设无穷等比数列$\{a_n\}$的各项和存在, 记为S, 那么$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots$, 将无穷项的和$a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots$提取$q$, 得$a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots=q(a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots)$, 从而$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots=a_1+q(a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots)=a_1+qS$, 得到$S=\frac{a_1}{1-q}(q\neq1)$.

探究2: 假设无穷等比数列$\{a_n\}$的各项和存在, 记为S, 那么$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots$, 我们类比等比数列前n项和的推导方法, 将

$S=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots$ ………………①

两边乘以q得

$qS=a_1q+a_1q^2+a_1q^3+\cdots$. …………②

①$-$②得$S-qS=a_1$, 于是得到

$S=\frac{a_1}{1-q}(q\neq 1)$.

问题验证

问题1 用以上两种探究方法求$0.\dot{3}$.

方法一: $0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots+\underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3+\cdots=0.3+0.1(0.3+0.03+0.003+\cdots)=0.3+0.1\times 0.\dot{3}$, 解得$0.\dot{3}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{1}{3}$.

方法二: $0.\dot{3}=0.3+0.03+0.003+\cdots+\underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3+\cdots$, 两边同乘以0.1得$0.\dot{3}\times 0.1=0.03+0.003+0.0003+\cdots+\underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3+\cdots$, 相减得$0.\dot{3}\times 0.9=0.3$, 得$0.\dot{3}=\frac{0.3}{0.9}=\frac{1}{3}$.

问题2 用以上两种探究方法求$2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$.

方法一: 记$S=2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$, 则$S=2+2(2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots)=2+2S$, 解得$S=-2$.

方法二: 记$S=2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$, 两边同乘以2, 得$2S=2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$, 相减得$-S=2$, 即$S=-2$.

为什么会有$2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots=-2$呢?

反思1: $0.3+0.03+0.003+\cdots+\underbrace{0.000\cdots0}_{n个}3+\cdots$的和存在, 那么是不是$2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$的和不存在呢? 那么$a+aq+aq^2+aq^3+\cdots$的和又在什么条件下存在呢?

反思2: 是不是$2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots$不能提取公因数2, 也就是有限项的和可以提取公因数(式), 而无穷项的和就不能提取公因数(式)了. 是不是有限项可以做乘法对加法的分配律, 而无限项的和就不能做乘法对加法的分配律了?

反思3: 在前面两点反思的基础上, 能不能用其他方法求无穷等比数列各项和呢?

探究3: 要求无穷等比数列各项的和, 我们可以用"极限"进行. 设无穷等比数列的前n项和为S_n, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在, 将这个极限值作为无穷等比数列的各项和, 即$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

2.2思考

思考1: 如果能用学生已掌握的提取公因数法, 或用推导等比数列前n项和的"错项相减法"求出无穷等比数列的各项的和, 就没有必要用极限的方法求无穷等比数列的各项和.

思考2: 从探究1、探究2及问题2, 能让学生体会到有限项正确的结论对于无限项就未必正确, 这是让学生体会到"有限"与"无限"区别的很好例子.

思考3: 虽然通过探究1、探究2及问题2, 促使我们去寻找新的求无穷等比数列的各项和的方法, 即用"极限"的方法进行求解, 也让学生体会到极限的具体应用.

3. 例题教学探究

例1 已知无穷等比数列$\{a_n\}$, 首项为a_1, 公比为q, 各项和为S. 完成下列各题:

(1) $a_1=2$, $q=\frac{1}{2}$, 则$S=$____;

(2) $q=\frac{1}{2}$, $S=4$, 则$a_1=$____;

(3) $a_1=2$, $S=4$, 则$q=$____.

例2 已知无穷等比数列$\{a_n\}$, 首项为a_1, 公比为q, 各项和为S. 完成下列各题:

(1) 若$q=\frac{1}{2}$, 则$a_1=$____, $S=$____;

(2) 若$a_1=2$, 则$q=$____, $S=$____;

(3) 若$S=4$, 则$a_1=$____, $q=$____.

例3 已知无穷等比数列$\{a_n\}$, 首项为a_1, 公比为q, 各项和为S. 探究a_1与S所满足的关系?

由$-1<q<1$且$q\neq 0$, 可得当$a_1>0$时, $S>\frac{1}{2}a_1$且$S\neq a_1$; 当$a_1<0$时, $S<\frac{1}{2}a_1$且$S\neq a_1$.

思考: 这3个例题主要针对$-1<q<1$且$q\neq 0$展开的. 例1主要针对公式的掌握, 例2是在例1的基础上, 以答案不唯一的方式呈现, 答案虽然不唯一, 目的是要掌握$-1<q<1$且$q\neq 0$. 例3是在前两个例题的基础上, 对a_1与S所满足的关系进行探究, 还是针对$-1<q<1$且$q\neq 0$进行教学. 以开放的形式, 通过对a_1与S所满足的关系的探究, 能加深对无穷等比数列各项和的教学.

例4 (华东师大版课本例题4) 如图1, 在Rt$\triangle ABC$内有一系列的正方形, 它们的边长依次为$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$, 若$AB=a$, $BC=2a$,

(下转第1-37页)

综合题讲解要提炼基本模型

——一道综合题的教学过程设计

214421 江苏省江阴市华士实验中学 王 东

长期以来，综合题讲解普遍存在着"四处出击，效率低下"的情况，原因是老师们大多遇题讲题，缺乏一定的针对性和系统性，或者缺乏深入的分析，只是注重讲出这道题的一种解法，而缺乏对于题目价值的分析和利用，导致综合题的价值利用不大，课堂效率低下，学生能力难以提升，我们的目标应该是努力提高综合题讲解的针对性和有效性，确实提高学生的数学解题能力.

《新课程标准》强调要重视学生已有的经验，使学生体验从实际背景中抽象出数学问题、构建数学模型的过程，让学生初步形成模型思想，提高应用意识和解决问题的能力. 本文将借助对一道综合题的设计来让学生体会从一道综合题中提炼出一个基本模型，并能广泛应用于解决类似问题的过程，让学生真正体会到建立一种模型，提炼一种方法，快速提升解题能力的数学解题发展过程.

教学过程设计:

1. 题目呈现

(2009年江西中考试题) 如图1，抛物线$y=-x^2+2x+3$与x轴相交于A、B两点(点A在点B的左侧)，与y轴相交于点C，顶点为D.

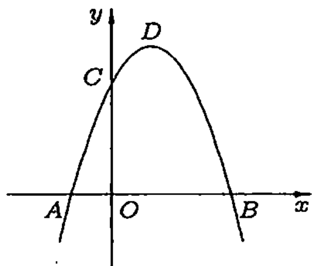


图 1

问题1: 直接写出A、B、C三点的坐标和抛物线的对称轴.

教学过程1: 问题1相对比较简单，学生不难得出结果: $A(-1,0)$、$B(3,0)$、$C(0,3)$. 对称轴是$x=1$.

学生得出正确结果后，教师继续设问，引导学生完成对结论的延伸研究.

延伸1　抛物线与x轴的交点可以怎样求，抛物线与y轴的交点可以怎样求.

延伸2　请同学们观察A、B两点的横坐标的数值与抛物线的对称轴直线方程的数值之间的关系. 教师可以作出抛物线的对称轴来引导观察. 画出如图2的图形，可得点H是点A和点B的中点，那么点H的横坐标就是点A和点B的坐标之和的一半，这样可以探究出结论: 设点A的坐标为$(x_1,0)$，点B的坐标为$(x_2,0)$，则对称轴方程为$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$. 对于结论的理解我们只要抓住图2这个几何模型，从中归纳出数量关系，这个模型正好揭示了这一关系的数学本质.

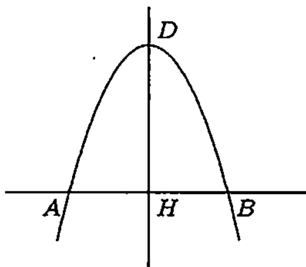


图 2

延伸3　从图2中我们还可以发现，由于抛物线的对称性，我们不妨沿竖直方向平移直线AB，在直线AB与抛物线有两个交点的情况下，这两个交点的纵坐标始终保持相等，而它们的横坐标之和也永远等于对称轴直线方程数值的两倍，这两个点始终关于对称轴对称. 这样就可以得出图2的几何模型，抓住这个模型，其中蕴含的数

量关系也是一目了然, 而且模型可以深入学生头脑, 提高学生解决此类题的能力.

问题2: 如图3, 连结BC, 与抛物线的对称轴交于点E, 点P为线段BC上的一个动点, 过点P作$PF/\!/DE$交抛物线于点F, 设点P的横坐标为m;

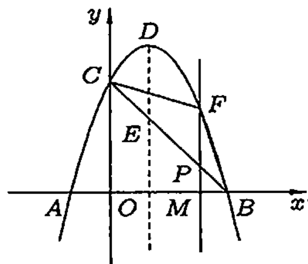


图 3

(1) 用含m的代数式表示线段PF的长, 并求出当m为何值时, 四边形$PEDF$为平行四边形?

教学过程2:

该设问可以引导学生直接抽象出图4的几何模型, 让学生在模型中寻找表示线段PF的长的方法.

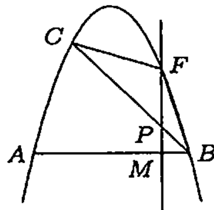


图 4

问题1: 从$PF/\!/DE$可以得知直线PF与x轴有怎样的位置关系?

问题2: 由上述问题可知点P与点F的横坐标相同, 那么如何求出它们的纵坐标呢? 提示: 点P在线段BC上, 点F在抛物线上.

问题3: 怎么表示出线段PF的长呢? 提示: 线段PF的长可以用点F的纵坐标减去点P的纵坐标.

这个模型可以让学生从复杂的图形中抽象出简洁的几何图形, 可以说这个图形在解决直线上两点之间的线段长问题时具有一定的代表性, 学生学会从复杂图形中抽象出类似的模型就可以很快抓住问题的实质, 从而解决问题, 这种抽象出模型的能力的提高, 也就提高了学生的解题能力.

接下来问题的解决可以让学生回忆平行四边形的模型, 图5有什么特点, 抓住平行四边形对边平行且相等就可以解决.

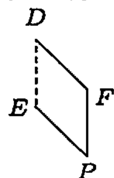


图 5

利用线段PF的长与线段DE的长相等, 可以得出问题的结果.

(2) ① 设直线BC的函数关系式为

$y=kx+b$.

把$B(3,0)$、$C(0,3)$分别代入得

$\begin{cases}3k+b=0,\\ b=3,\end{cases}$ 解得 $k=-1$, $b=3$.

所以直线BC的函数关系式为$y=-x+3$.

当$x=1$时, $y=-1+3=2$, $\therefore$ $E(1,2)$.

当$x=m$时, $y=-m+3$,

$\therefore$ $P(m,-m+3)$.

在$y=-x^2+2x+3$中, 当$x=1$时, $y=4$.

$\therefore$ $D(1,4)$.

当$x=m$时, $y=-m^2+2m+3$,

$\therefore$ $F(m,-m^2+2m+3)$.

$\therefore$ 线段$DE=4-2=2$, 线段$PF=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m$.

$\because$ $PF/\!/DE$,

$\therefore$ 当$PF=ED$时, 四边形$PEDF$为平行四边形.

由$-m^2+3m=2$, 解得$m_1=2$, $m_2=1$ (不合题意, 舍去).

因此, 当$m=2$时, 四边形$PEDF$为平行四边形.

② 设$\triangle BCF$的面积为S, 求S与m的函数关系式.

教学过程3: 我们需要关注的是$\triangle BCF$的面积, 引导学生从图形中寻找$\triangle BCF$, 得到图6的图形.

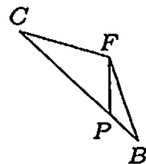


图 6

问题1: 如何求出$\triangle BCF$的面积.

由学生自主探索, 教师不难发现大部分学生存在问题. 如何进行引导成了教学的关键. 我们不妨这样设计, 对于几何图形的面积引导学生分成这样几种情况考虑, 情况一: 可以直接利用公式计算的图形, 如三角形, 梯形等. 情况二: 不可直接套用面积公式计算的图形, 如任意四边形、五边形等. 这儿应该属于情况一, 但是直接利用三角形面积公式, 我们发现比较困难, 怎么办, 也就是说类似情况二我们怎样求面积, 到这儿, 部分学生能回忆起对于一些复杂的图形求面积可以用拼与分割的方法, 转化成可以直接计算的图形.

问题2: 这里$\triangle BCF$可以怎样转化. 此时学生的想法很多, 让学生充分进行回答, 并加以点评和肯定.

引导学生通过观察图6, 可以较为简便的将$\triangle BCF$分割成两个三角形.

问题3: 怎样分别求出$\triangle CPF$和$\triangle BPF$的面积.

下面由学生自主探索, 或适当加以讨论完成解答. 教师在学生解决完后给出解题过程.

设直线PF与x轴交于点M, 由$B(3,0)$、$O(0,0)$, 可得$OB=OM+MB=3$.

$\because\ S=S_{\triangle BPF}+S_{\triangle CPF}$,

即$S=\frac{1}{2}PF\cdot BM+\frac{1}{2}PF\cdot OM$

$=\frac{1}{2}PF\cdot(BM+OM)=\frac{1}{2}PF\cdot OB$.

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times 3(-m^2+3m)$

$=-\frac{3}{2}m^2+\frac{9}{2}m\,(0\leqslant m\leqslant 3)$.

拓展1: 这个三角形被线段PF分割成两个三角形, 所以我们可以把线段PF作为两个三角形公共的底.

拓展2: 由图形的特征我们发现左边三角形的高是点C到PF的距离, 而右边三角形的高是点B到PF的距离, 这样在图7中我们就可以得出

$$S=\frac{1}{2}PF\cdot BM+\frac{1}{2}PF\cdot OM$$
$$=\frac{1}{2}PF(BM+OM)=\frac{1}{2}PF\cdot OB.$$

拓展3: 观察图7我们可以发现, 我们创造了一种类似图形面积的新求法, 即在一定的条件下, 我们可以定义线段PF为$\triangle BCF$的铅垂高, 点B到经过点C的铅垂线的距离为水平宽(如图7中的线段OB长), 那么三角形的面积就等于铅垂高与水平宽乘积的一半.

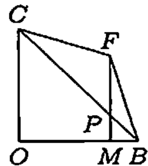


图7

2. 模型归纳

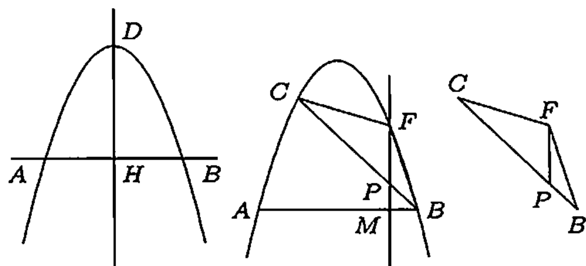


图8

3. 模型运用

教学过程4: 让学生逐步具有模型思想, 并能运用模型提高解题能力.

课堂练习:

(2009 永州市中考试题) 如图9, 在平面直角坐标系中, 点A、C的坐标分别为$(-1,0)$、$(0,-\sqrt{3})$, 点B在x轴上. 已知某二次函数的图像经过A、B、C三点, 且它的对称轴为直线$x=1$, 点P为直线BC下方的二次函数图像上的一个动点(点P与B、C不重合), 过点P作y轴的平行线交BC于点F.

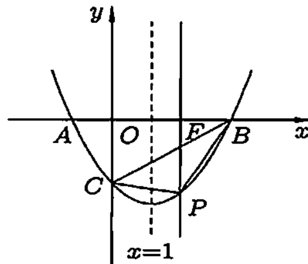


图9

(1) 求该二次函数的解析式;

(2) 若设点P的横坐标为m, 用含m的代数式表示线段PF的长.

(3) 求$\triangle PBC$面积的最大值, 并求此时点P的坐标.

设计意图分析:

提炼基本模型, 感悟解题方法

由呈现的一道综合题展开, 题目的一系列问题的解决都可以引导学生提炼模型, 并抓住模型的特征, 或者在问题解决后上升到基本模型的高度, 归纳反思解题的方法. 波利亚指出"学习任何东西最好的途径是自己去发现", 数学解题是一种创造性的活动, 无法教会学生做所有的题目, 但可以通过有限道题目的学习去领会解无限道题的数学机智. 在2009年永州市, 2009年重庆市江津, 2010无锡市等地方的中考试卷上也都出现了类似的问题, 可见此类模型的典型性.

(2009重庆市江津中考试题) 如图10, 抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于$A(1,0)$、$B(-3,0)$两点. (1) 求该抛物线的解析式; (2) 在(1)中的抛物线上的第二象限上是否存在一点P, 使$\triangle PBC$的面积最大? 若存在, 求出点P的坐标及$\triangle PBC$的面积最大值. 若没有, 请说明理由.

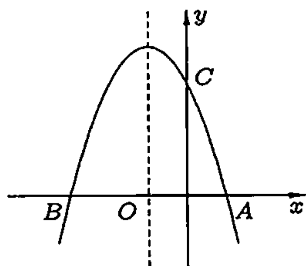


图 10

(2010 江苏省无锡市中考试题) 如图11, 矩形$ABCD$的顶点A、B的坐标分别为$(-4,0)$和$(2,0)$, $BC=2\sqrt{3}$. 设直线AC与直线$x=4$交于点E. (1) 求以直线$x=4$为对称轴, 且过C与原点O的抛物线的函数关系式, 并说明此抛物线一定过点E; (2) 设(1)中的抛物线与x轴的另一个交点为N, M是该抛物线上位于C、N之间的一动点, 求$\triangle CMN$面积的最大值.

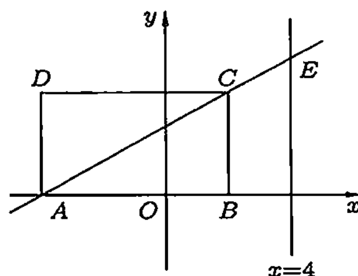


图 11

形成模型思想, 提升解题能力

利用此题可以让学生今后将不变的模型置身于变化的题目之中, 通过类比、迁移的思想方法, 抓住模型的本质特征这个不变因素, 形成模型的思想, 以解决一个问题, 来贯通一类问题. 同时通过深刻领悟模型的本质特征, 揭示规律, 摆脱题海战之苦, 真正引导学生学会以"不变"应"万变", 深刻感悟解题的方法, 快速提高解题能力. 学生一旦形成了这种模型思想, 可以真正达到举一反三的境界. 本案例通过寻找典型几何模型, 探索利用模型解决问题的新方法, 真正启迪学生数学智慧, 培养学生的创新意识, 提升学生的数学素养.

数学教师要善于对解题进行分析研究, 学会从一些典型的题型中抽象出简单的具有代表性的数学模型进行适当的拓展与演变, 引导学生充分探究, 逐步提炼问题本质.

(上接第1-34页)

组.

对于下列三种情形, 只需选做一种, 满分分别是 ① 2分, ② 6分, ③ 8分; 若选择了多于一种情形, 则按照序号较小的解答计分.

① $A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,0)$.

② $A(1,3)$、$B(1,0)$、$C(-1,3)$、$D(-1,-2)$.

③ $A(0,1)$、$B(0,0)$、$C(0,0)$、$D(2,0)$.

本题的第(3)小题设置了3个分层评分的情形, 学生在理解了问题的定义后, 可以根据自己剩下的时间和平时对数学问题的钻研能力决定选做的情形, 适合了不同学习层次学生的能力水平. 在与学生的交流过程中, 学生普遍对这道题感觉不错, 因为他们有了小小的主动权, 可以根据自己的实际情况自行选择答题的难易程度, 而且因此带来的分值差异, 他们也可以接受.

基于教材例、习题的题组辨析, 提升学生思维

200051　上海市民立中学　钟　萍

如何有效利用教材中的例、习题, 发挥其更大的教学价值与功能, 是教师一直在思考、实践和探索的课题. 本文通过上海二期课改教材高二(下)解析几何例、习题教学中的几个具体案例, 结合自己的教学实践, 辅图诠释教学思路, 就如何在教材例、习题的基础上, 合理地讲题、变题和串题, 在题组辨析中提升学生思维水平, 谈谈自己的认识.

1. 合理"串"题, 聚焦式夯实"双基", 提升思维深度

所谓聚焦式, 如图1, 即选择的例、习题集中反映某一个知识点或者某一种解题方法, 从而让学生在能求解不同问题的基础上, 夯实数学基础知识, 熟练掌握数学基本方法.

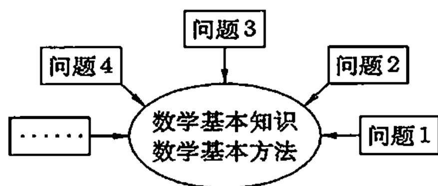


图 1

1.1 聚焦数学基本知识, 加深数学概念的理解

案例1　在学习和掌握了抛物线的定义和方程后, 学生能否深刻理解概念——到定直线和直线外的定点距离相等的动点的轨迹, 并熟练使用该定义巧解题, 是非常关键的. 为了实现这一目的, 可考虑调整教材例、习题的讲解顺序并合理安排(见图2).



图 2

例1　(教材例1)点P与点$F(2,0)$的距离比它到直线$x+4=0$的距离小2, 求点P的轨迹方程.

课本的解法很好地突出了抛物线定义的应用. 为进一步夯实学生对抛物线定义的理解, 给出变式: 点P与点$F(2,0)$的距离比它到直线$x=0$的距离大2, 求点P的轨迹方程. 学生很容易得出答案也是$y^2=8x$. 但忽略了另外一种情形, 即直线$x=0$不动, 把点$F(2,0)$移动到点$O(0,0)$, 则原问题转化为点P到点$O(0,0)$的距离等于到定直线$x=0$的距离, 此时轨迹是一条射线$y=0\,(x\leqslant 0)$, 因此最后轨迹方程应为: $y^2=8x$或$y=0\,(x\leqslant 0)$.

此变式通过转换例题的条件, 使学生对抛物线定义的内涵有了一定的认识. 为进一步强化这一认识, 有序且系统地分析以下题组:

例2　(教材例2)抛物线$y^2=x$上一点M到焦点的距离为1, 求点M的横坐标.

例3　(习题12.7 A−4)抛物线$y^2=2x$上的A、B两点到焦点的距离之和为5, 求AB的中点的横坐标.

例4　(教材例3)过抛物线$y^2=4x$的焦点, 斜率为2的直线l, 与抛物线相交于A、B两点, 求线段AB的长.

例5　(练习12.8−8)已知点A的坐标为(3, 2), F为抛物线$y^2=2x$的焦点, 若点P在抛物线上移动, 求$|PA|+|PF|$的最小值, 并求此时点P的坐标.

教材是通过设点坐标列方程组解例2的, 在此方法基础上, 我们可以从抛物线定义出发化M到焦点的距离为到准线的距离, 从而快速求出M的横坐标. 用这个方法求解例3、4、5就显得自然而简单, 同时进一步培养了学生运用定义巧解题的意识. 在此基础上, 我们还可以更进一步解决以下问题:

例6　(习题12.8 B−3)抛物线$y^2=8x$的动

弦AB的长为16, 求弦AB的中点M到y轴的最短距离.

例7　已知点P是抛物线$y^2=4x$上的一个动点, 则点P到点$(0,2)$的距离与P到该抛物线准线的距离之和的最小值是__________.

1.2 聚焦数学基本方法, 增强数学思想的领悟

案例2　直线与圆锥曲线相关的问题非常之多, 所涉及到的数学思想方法也非常丰富, 如图3, 虽无法一一穷举, 但其中蕴含的一条解题的主线便是联立、消元、考虑二次项系数是否为0, 以及对二次项系数不为0时再利用根与系数的关系解题. 在设计和组织课堂教学时, 我们可以仿照图3的模式精心选择例、习题, 也可以从一个问题出发, 生出不同的问题情境进行思考.

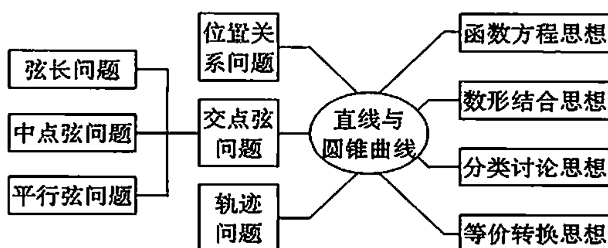


图3

例　(习题12.6B(4)) 已知直线$l: y=ax+1$与双曲线$C: 3x^2-y^2=1$相交于A、B两点.

(1) 求实数a的取值范围;

(2) 求当实数a为何值时, 以线段AB为直径的圆经过坐标原点.

教学中, 学生解完该题后, 笔者继续从各个角度给出相关的变式问题.

变式1　① 直线$l: y=ax+1$与双曲线$C: 3x^2-y^2=1$有一个公共点, 求实数a的值.

② 过点$P(2,1)$能作几条直线与双曲线$C: 3x^2-y^2=1$有一个公共点?

变式2　直线$l: y=ax+1$截双曲线$C: 3x^2-y^2=1$所得弦长为$2\sqrt{5}$, 求实数a的值.

变式3　求直线$l: y=ax+1$与双曲线$C: 3x^2-y^2=1$相交所得弦的中点的轨迹方程.

变式4　求双曲线$C: 3x^2-y^2=1$的一组斜率为2的平行弦的中点的轨迹方程.

变式5　双曲线$C: \frac{x^2}{a^2}-y^2=1\,(a>0)$与直线$l: x+y=1$相交于两不同点$A$、$B$, 直线$l$与$y$轴的交点为$P$, 且$\overrightarrow{PA}=\frac{5}{12}\overrightarrow{PB}$, 求$a$的值.

习题第(1)小题学生容易忽视联立得方程后二次项系数不为0, 变式1则变换了角度巩固了第(1)小题容易忽视的问题, 同时这两个问题结合起来分析, 能帮助学生结合双曲线的渐近线和切线理解用方程的方法解题的几何意义, 达到"形的生动"与"数的严谨"合二为一的效果, 充分体现数形结合的思想. 变式2、3、4则围绕弦的问题由点及面层层展开, 扎实了主线方法. 变式5的难度相对较大, 让学生懂得面对较复杂问题时, 能抓住核心方法即运用根与系数的关系解题.

在探讨上述题组过程中, 学生对数学基本知识和思想方法经历了从肤浅到深刻的认识、从零散到系统的把握、从粗浅的模仿训练到对内在联系的深刻体会, 从而学会思考和比较, 学会了以不变应万变, 提升了思维的深刻性.

2. 科学"变"题, 辐射式多向思考, 提升思维广度

所谓辐射式, 如图4, 即围绕某个典型例、习题, 通过变换条件或结论, 可以从数量关系和数学运算出发, 也可以从问题的结构特征出发进行多角度变式, 提倡发散式思考.

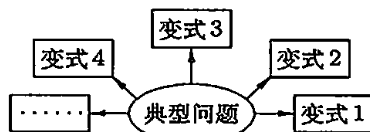


图4

2.1 变换特殊数据和条件

案例3　习题12.4A(5): $\triangle ABC$的两个顶点A、B的坐标分别是$(-6,0)$、$(6,0)$, AC、BC边所在直线的斜率之积等于$-\frac{4}{9}$, 求顶点C的轨迹方程.

轨迹方程为: 椭圆$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1\,(x\neq\pm6)$. 当我们变化题中特殊条件, 会发现一些相映成趣的结论:

变式1　将题中"$-\frac{4}{9}$"变为"$\frac{4}{9}$"时, 所得轨迹方程为双曲线$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1\,(x\neq\pm6)$.

变式2　将题中"$-\frac{4}{9}$"变为"-1"时, 所得轨迹方程为圆$x^2+y^2=36\,(x\neq\pm6)$.

变式3 将题中"斜率之积等于$-\frac{4}{9}$"变为"斜率之和等于$-\frac{4}{9}$", 所得轨迹方程为曲线$2x^2+9xy-72=0(x\neq\pm6)$.

变式4 将题中"斜率之积等于$-\frac{4}{9}$"变为"斜率之差等于$-\frac{4}{9}$", 所得轨迹方程为抛物线$x^2-27y-36=0(x\neq\pm6)$.

上述题组非常生动地体现了变式的魔力, 仅改变数字大小或符号, 或在四则运算间转换, 我们所学习的不同二次曲线类型便逐一跃然纸上, 真可谓"一花引得百花开, 一题变出多题来", 既灵动地实现了知识间的迁移, 又在此过程中提升了学生思维的广阔性.

2.2 转换问题的条件与结论

案例4 (教材例3) 已知$M(x_0,y_0)$为圆$C:x^2+y^2=r^2\,(r>0)$上一点, 求过点M的圆C的切线l的方程.

本题利用直线的点法向式很容易求得该切线l的方程为$x_0x+y_0y=r^2$. 但该问题所隐含的本质却值得我们去探索和发现, 下面给出在该例题背景下的一组变式习题.

变式1 已知直线$x_0x+y_0y=1$与圆$C:x^2+y^2=1$相切, 证明$M(x_0,y_0)$在该圆上.

变式2 已知$M(x_0,y_0)$是圆$C:x^2+y^2=r^2$内异于圆心的一点, 求直线$x_0x+y_0y=r^2$与此圆的位置关系.

变式3 直线$x_0x+y_0y=r^2$与圆$C:x^2+y^2=r^2$相交, 求点$M(x_0,y_0)$与该圆的位置关系.

变式4 已知点$M(a,b)\,(ab\neq0)$是圆$C:x^2+y^2=r^2$内一点, 以M为中点的弦所在的直线为m, 直线$n:ax+by=r^2$, 试判断直线n与直线m、直线n与圆C的位置关系.

我们会发现变式问题1、2、3虽然已知条件不同, 研究的问题不一样, 但总体上都是围绕着点$M(x_0,y_0)$、直线$x_0x+y_0y=r^2$与圆$C:x^2+y^2=r^2$的位置关系展开的, 它们之间究竟有怎样的内在关系呢? 通过点$M(x_0,y_0)$与圆心的距离$d_1=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$, 圆心到直线$x_0x+y_0y=r^2$的距离$d_2=\frac{r^2}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$的关系分析我们不难得出结论:

直线$x_0x+y_0y=r^2$与圆$C:x^2+y^2=r^2$
$$\begin{cases}\text{相切}\Longleftrightarrow M(x_0,y_0)\text{在圆上}\\ \text{相交}\Longleftrightarrow M(x_0,y_0)\text{在圆外}\\ \text{相离}\Longleftrightarrow M(x_0,y_0)\text{在圆内}\end{cases}$$

有了该结论, 变式4或者更多其他相关的问题的解决便能水到渠成了. 基于该例题的变式练习及该题组的辨析, 可以让学生发现问题的本质, 体现"多题归一"思考方式, 提升学生思维的灵活性.

3. 大胆"挖"题, 发散式探究学习提升思维的创造性

如图5, 我们通过某个具体的问题或现象, 由表及里, 深入思考, 探究挖掘隐含其中的一般性规律, 给出严谨推导证明, 并加以推广应用.

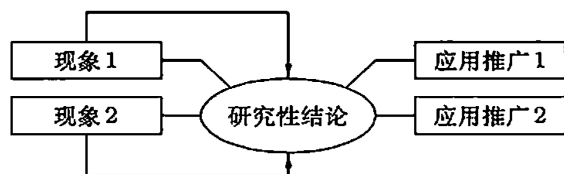


图5

案例5 从一道习题到一类抛物线研究性问题的探究: (复习题A(1)) 直线$y=x-2$与抛物线$y^2=ax$相交于A、B两点, 且$OA\perp OB$, 求实数a的值.

逆向问题: 直线$y=x-2$与抛物线$y^2=2x$相交于A、B, 求$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$的值.

(1) 由以上两个问题能否写出一个命题?

(2) 并将该命题加以推广, 使得(1)中的命题是推广后得到的命题的特例, 并证明推广后得到的命题正确.

推广应用: 已知直角$\triangle OAB$的直角顶点O为原点, A、B在抛物线$y^2=2px\,(p>0)$上,

① 直线AB是否经过一个定点, 若经过, 求出该定点坐标, 若不经过, 说明理由;

② 证明A、B两点的横坐标之积、纵坐标之积为定值;

③ 求O点在线段AB上射影M的轨迹方程.

通过练习册上一道普通的习题, 进行逆向思考, 发现了一个现象: 过(2,0)的直线截抛物线$y^2=2x$所得弦对顶点的张角为90°, 反过来也成立. 定点的横坐标与抛物线方程中一次项系数正好相等, 那么这是一个特殊现象还是一般性的规律呢? 于是鼓励学生大胆猜想, 仔细求证,

(下转封底)

小议两随机事件的互不相容与相互独立之别

200241 华东师范大学数学系 龚妙昆

1. 引言

两个随机事件的互不相容和相互独立是概率论中最基本的概念, 虽然不是太复杂, 但也非一目了然, 时常会有一些混淆. 下面就这两概念及相关的一些概念作一小议.

2. 随机试验、基本事件与随机事件

在概率论中, 基本事件与随机事件等是一些初始性的概念, 认识清楚了, 有利于更清晰地理解掌握后继相关概念.

首先: 随机试验方式确定了基本事件类型. 下面三种试验方式就确定了不同的基本事件类型.

(A) 抛掷一颗骰子方式下的基本事件为:

$\omega_1=\{1\}$, $\omega_2=\{2\}$, $\cdots$, $\omega_6=\{6\}$, 共6个;

(B) 先后抛二颗骰子方式下的基本事件为:

$\omega_1=\{1,1\}$, $\omega_2=\{1,2\}$, $\cdots$, $\omega_6=\{1,6\}$, $\omega_7=\{2,1\}$, $\cdots$, $\omega_{36}=\{6,6\}$, 共36个;

(C) 同时(不计次序)抛二颗骰子方式下的基本事件为:

$\omega_1=\{1,1\}$, $\omega_2=\{1,2\}$, $\cdots$, $\omega_6=\{1,6\}$, $\omega_7=\{2,2\}$, $\cdots$, $\omega_{11}=\{2,6\}$, $\cdots$, $\omega_{21}=\{6,6\}$, 共21个.

注意: 在方式(C)下, 这不是等概率的基本事件, 其中基本事件$\{1,1\}$, $\{2,2\}$, $\cdots$, $\{6,6\}$的概率都为$\frac{1}{36}$, 其余15个基本事件的概率均为$\frac{1}{18}$. 基本事件确定后, 样本空间Ω(即基本事件全体)自然就完全确定了. 随机事件概念为样本空间的子集. 如在扔一颗骰子的试验中, 出现双号的随机事件$A=\{\{2\},\{4\},\{6\}\}$, 它是样本空间$\Omega=\{\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}\}$的子集, 通常简洁地记为$A=\{2,4,6\}$和$\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$. 注意: 样本空间$\Omega$、随机事件$A$都是确定的集合, 相应地概率值计算也是确定的.

3. 两个随机事件的互不相容

若随机事件A与B满足$A\cap B=\varnothing$, 则称随机事件A与B为互不相容. 例如在扔骰子的随机试验中, 若记$A=\{2,4,6\}$, $B=\{3\}$, 则A与B为互不相容, 样本空间上表现为无重叠(如图1).

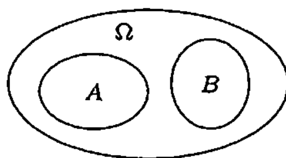


图 1

由此可得到所有不同的基本事件都是互不相容的. 如果随机事件A与B互不相容, 容易计算$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$及$P(A\cap B)=0$.

4. 两个随机事件的相互独立

独立性是用概率值来定义的. 若$P(A\cap B)=P(A)P(B)$, 则称事件A与B相互独立. 依此计算, 可得任何一个随机事件A与必然事件Ω(即样本空间)、不可能事件$\varnothing$或概率为零的事件相互独立.

当$P(B)\neq 0$(或$P(A)\neq 0$)时, 两个随机事件A与B相互独立$\Longleftrightarrow$ $P(A|B)=P(A)$(或$P(B|A)=P(B)$), 其中$P(A|B)$是条件概率, $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$, 意即在随机事件B发生的条件下, 随机事件A发生的概率. 独立性通常表示: 两个随机事件先后发生的概率值没有依赖关系. 例如, 两颗骰子在相同的条件下依次抛掷, 那么先后的实际结果应该是独立的. 属于独立重复随机试验.

5. 两个随机事件的互不相容与相互独立的关系

互不相容与相互独立间有以下结论:

(1) 对于互不相容的随机事件A与B, 有两种情形:

(i) 若$P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$, 则必不相互独

折线距离的最小值初探

225700 江苏省兴化中学 范叶华

平面及空间两点间的距离公式早为大家所熟悉，笔者受2010年全国高考广东理科数学卷最后一题的启发，对折线距离进行了一些探索.

定义1 设$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$是平面直角坐标系xOy上的两点，现定义由点A到点B的一种折线距离$\rho(A,B)$为$\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

例1 在平面直角坐标系xOy中，已知点$B(1,0)$，点M为直线$x-2y+2=0$上的动点，则$\rho(B,M)$取最小值时点M的坐标是______.

解：设$M(2b-2,b)$，则有

$$\rho(B,M)=|2b-3|+|b|$$

$$=\begin{cases}3b-3, & b\geqslant\dfrac{3}{2},\\ 3-b, & 0\leqslant b<\dfrac{3}{2},\\ 3-3b, & b<0.\end{cases}$$

当$b\geqslant\dfrac{3}{2}$时，$3b-3\geqslant\dfrac{3}{2}$；当$0\leqslant b<\dfrac{3}{2}$时，$\dfrac{3}{2}<3-b\leqslant3$；当$b<0$时，$3-3b>3$.

立. 因为$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$，而$P(A)P(B)\neq0$，所以不相互独立. 事实上，若$B$发生了，则$A$肯定不发生，即在此情形下$A$发生的概率为$P(A|B)=0$；而若$B$不发生，则$A$发生的概率应为$P\left(A|\overline{B}\right)=\dfrac{P(A)}{1-P(B)}\neq0$(由条件可得$P(B)\neq1$)，因此$B$的发生与否影响到$A$发生概率的大小.

(ii) 若$P(A)$、$P(B)$中至少有一个为0，譬如$P(A)=0$，则$P(A)P(B)=0$，$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$，由定义知，此种情形为$A$与$B$相互独立.

(2) 相容的随机事件A与B可能相互独立，也可能不独立. 以如图2所示的几何概率为例，随机事件A与B是相容的，且$P(A\cap B)=\dfrac{2}{9}$，而$P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{9}=\dfrac{4}{27}\neq\dfrac{2}{9}$，所以$A$与$B$不独立.

Ω

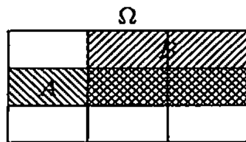


图 2

但对于图3中的情形，A与B也是相容的，而$P(A\cap B)=\dfrac{1}{9}$，且$P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$，所以按定义，这两个事件是相互独立的. 容易验证$P(A|B)=P(A)$，实际就是$P(A|B)=P(A|\Omega)$，表明：$A$在$B$发生的条件下的概率 = A在样本空间Ω下的概率，所以A发生的概率与B的发生与否无关.

Ω

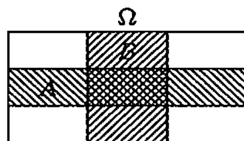


图 3

6. 结束语

随机事件的随机性、互不相容性与相互独立性，可以通过"过程"、"空间"或"时序"等特征加以认识；两个概率非零的不相容事件必不独立；一般的两个事件的不相容与独立之间无必然关联.

参考文献

[1]张丽华，王颖喆. 概率论教学的探索与实践[J]. 数学教育学报，2010(3): 97-99.

[2]谢琳，刘剑涛. 从两个争议看高中概率论基本概念教学中存在的问题[J]. 数学教育学报，2010(6): 6-9.

所以当$b=\frac{3}{2}$时, $\rho(B,M)$取得最小值$\frac{3}{2}$, 此时$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

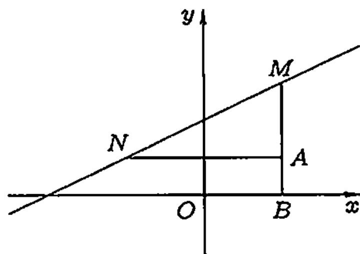


图 1

此外, 本题还可以用如下的几何解法: 如图1, 过点B作x轴的垂线交直线$x-2y+2=0$于点M, 则点M即为所求. 理由如下: 在直线上任取一点N(不同于点M), 过点N作NA垂直BM于点A, 此时$\rho(B,N)=NA+AB$, 由于直线的斜率等于$\frac{1}{2}$, 因此$\rho(B,N)=NA+AB>MA+AB=MB$, 所以$M\left(1,\frac{3}{2}\right)$即为所求.

点评: 对于较复杂的问题, 可以用参数方程来求解, 我们可以看下列问题.

例2　求圆$x^2+y^2=1$上任意一点与直线$2x+y-2\sqrt{5}=0$上任意一点折线距离的最小值.

解: 设圆的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha,\end{cases}$ $\alpha\in[0,2\pi)$, (x,y)为$2x+y-2\sqrt{5}=0$上任意一点, 则有

$$\begin{aligned}\rho&=|x-\cos\alpha|+|y-\sin\alpha|\\&=\frac{1}{2}(2|x-\cos\alpha|+2|y-\sin\alpha|)\\&\geqslant\frac{1}{2}(2|x-\cos\alpha|+|y-\sin\alpha|).\cdots\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

由于对于任意的x、$y\in\mathbf{R}$, $|x|+|y|\geqslant|x+y|$, 故有$(*)\geqslant\frac{1}{2}|2x+y-2\cos\alpha-\sin\alpha|=\frac{1}{2}|2\sqrt{5}-\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)|$ $\left(\text{其中}\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\geqslant\frac{\sqrt{5}}{2}$.

所以圆$x^2+y^2=1$上任意一点与直线$2x+y-2\sqrt{5}=0$上任意一点折线距离的最小值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$. 此时可得圆上的点为$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. 该点到直线上任意一点的折线距离, 即该点到直线上的点$\left(\frac{9\sqrt{5}}{10},\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$的折线距离, 即最小值为$\frac{\sqrt{5}}{2}$.

点评: 例2采用了参数方程来求解, 还使用了不等式的放缩, 并结合三角函数的知识来求解.

例3　求椭圆$4x^2+y^2=1$上任意一点与直线$2x+y-\sqrt{5}=0$上任意一点折线距离的最小值.

解: 方法类似于例2, 最小值为$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2}$.

例4　求双曲线$\frac{x^2}{2}-y^2=1$上任意一点与直线$2x+y=1$任意一点的最小值.

解: 方法类似于例2, 最小值为$\frac{\sqrt{7}-1}{2}$.

这类问题我们还可以推广到空间直角坐标系中.

定义2　设$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$是空间直角坐标系$O-xyz$中的两点, 现定义由点A到点B的一种折线距离为$\rho(A,B)$, $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|+|z_1-z_2|$.

例5　求球面$x^2+y^2+z^2=1$上任一点与平面$2x+y+z-2\sqrt{5}=0$上任意一点折线距离的最小值.

解: 设球面上任意一点的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos\theta\cos\varphi,\\ y=\cos\theta\sin\varphi,\\ z=\sin\theta.\end{cases}$$

(x,y,z)为直线$2x+y+z-2\sqrt{5}=0$上任意一点, 则$\rho=|x-\cos\theta\cos\varphi|+|y-\cos\theta\sin\varphi|+|z-\sin\theta|=\frac{1}{2}(2|x-\cos\theta\cos\varphi|+2|y-\cos\theta\sin\varphi|+2|z-\sin\theta|)\geqslant\frac{1}{2}(2|x-\cos\theta\cos\varphi|+|y-\cos\theta\sin\varphi|+|z-\sin\theta|)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$

由于对于任意的x、y、$z\in\mathbf{R}$, $|x|+|y|+|z|\geqslant|x+y+z|$, 故有

$$\begin{aligned}(*)&\geqslant\frac{1}{2}|2x+y+z\\&\quad-(2\cos\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta)|\\&=\frac{1}{2}|2\sqrt{5}-\sqrt{1+(2\cos\varphi+\sin\varphi)^2}\sin(\theta+\omega)|\\&\geqslant\frac{1}{2}|2\sqrt{5}-\sqrt{1+(2\cos\varphi+\sin\varphi)^2}|\\&\geqslant\sqrt{5}-\frac{\sqrt{6}}{2}.\end{aligned}$$

所以球面$x^2+y^2+z^2=1$上任一点与平面$2x+y+z-2\sqrt{5}=0$折线距离的最小值为$\sqrt{5}-$

一类"二动点型最值问题"的教法探索

226500 江苏省如皋外国语学校 刘 建

动点型最值问题是近几年中考的热点, 此类问题形式多样、方法各异. 本文所探讨的一类"二动点型最值问题"有其特殊的方法, 若能在教学中教会学生这种方法, 学生就能很快找到解决这类问题的突破口.

一、一类"二动点型最值问题"的特征

先给出近三年中考中出现的一些试题:

例1 (2009年陕西第16题) 如图1, 在锐角$\triangle ABC$中, $AB=4\sqrt{2}$, $\angle BAC=45^\circ$, $\angle BAC$的平分线交BC于点D, M、N分别是AD和AB上的动点, 则$BM+MN$的最小值是________.

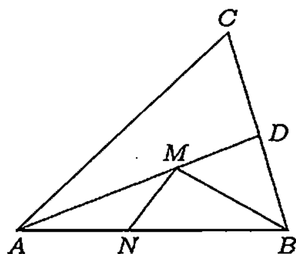


图1

例2 (2009年漳州第25题第(3)题) 如图2, $\angle AOB=45^\circ$, P是$\angle AOB$内一点, $PO=10$, Q、R分别是OA、OB上的动点, 求$\triangle PQR$周长的最小值.

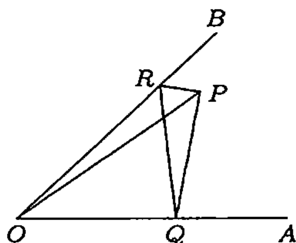


图2

例3 (2010年冷水江第25题第(3)题) 如图3, 已知$OABC$是一张放在平面直角坐标系中的矩形纸片, O为坐标原点, 点A在x轴上, 点C在y轴上, 且$OA=5$, $OC=3$. 在AB边上选取一点D, 将$\triangle AOD$沿OD翻折, 使点A落在BC边上, 记为点E.

(1)、(2)略.

(3)在x轴、y轴上是否分别存在点M、N, 使四边形$MNED$的周长最小? 如果存在, 求出周长的最小值; 如果不存在, 请说明理由.

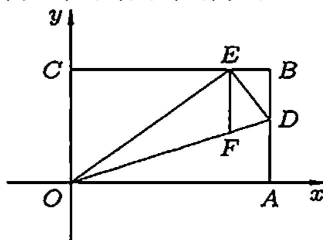


图3

例4 (2011年福州第22(3)题) 如图4, 二次函数$y=ax^2+2ax-3a\ (a\neq 0)$图像的顶点为H, 与x轴交于A、B两点(B在A点右侧), 点H、B关于直线$l: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$对称.

(1)、(2)略.

(3)过点B作直线$BK /\!/ AH$交直线l于点K, M、N分别为直线AH和直线l上的两个动点, 连

$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, 此时可得球上的点为$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$. 该点到平面$2x+y+z-2\sqrt{5}=0$上任意一点的折线距离, 即该点到平面上的点$\left(\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$的折线距离, 即最小值为$\sqrt{5}-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

例6 求椭球面$2x^2+y^2+z^2=1$上任一点与平面$2x+y+z-2\sqrt{5}=0$折线距离的最小值.

解: 方法类似于例5, 最小值为$\sqrt{5}-1$.

以上是笔者的一点探索, 数学问题的探索永无止境, 从而促进了数学不断变化发展.

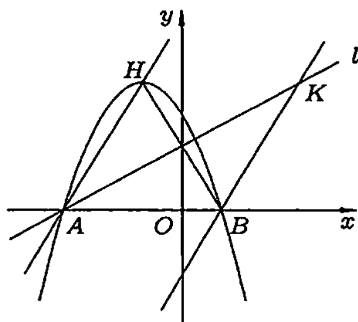


图 4

结HN、NM、MK, 求$HN+NM+MK$和的最小值.

这几道中考题有以下共同特征: 问题中涉及两个动点, 并且均要求最值(这类问题一般要求最小值), 因此不妨把这类问题称为"二动点型最值问题". 这两个动点在各自所在的直线(也可能是线段或射线)上分别运动, 其中一个动点的位置对另一动点的位置没有影响. 这类问题较难用函数的方法进行求解, 一般用几何方法解决. 由于涉及两个动点, 可变的量多, 因而此类问题对学生的能力要求比较高, 往往出现在中考试卷中填空题最后一题或整份试卷最后一题的位置, 是学生能否夺取高分的关键.

二、这类"二动点型最值问题"的教法

1. 一道课本习题的教法详述

下面以一道课本习题的教学为例, 详细阐述这类问题应如何教.

人教版数学八年级上册第47页第9题(以下称为问题1)为:

如图5, A为马厩, B为帐篷, 牧马人某一天要从马厩牵出马, 先到草地边某一处牧马, 再到河边饮马, 然后回到帐篷. 请你帮他确定这一天的最短路线.

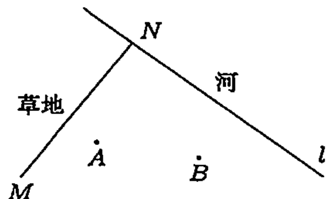


图 5

不少老师这样进行教学:

第一步: 给出作法

分别作出点A关于MN和点B关于l的对称点A'、B', 连结$A'B'$, 与MN和l分别相交于点P、Q, 则路线$APQB$即为所求(如图6).

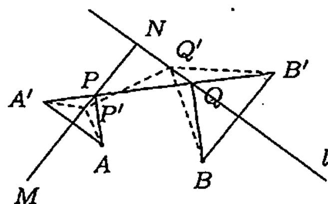


图 6

第二步: 给出证明

在MN和l上任取点P'和Q',

$\because$ 点A关于MN和点B关于l的对称点是A'、B',

$\therefore AP=A'P,\ QB=QB'$,

$\therefore AP+PQ+QB$

$=A'P+PQ+QB'=A'B'$.

同理$AP'+P'Q'+Q'B$

$=A'P'+P'Q'+Q'B'$,

由两点之间距离最短, 可得:

$A'P'+P'Q'+Q'B'\geqslant A'B'$,

$\therefore$ 路线$APQB$为最短路线.

上述教学过程, 不仅给出了本题的作法, 而且还给出了证明, 似乎做到了"让学生不仅知其然, 而且知其所以然", 但为什么这么做? 是如何思考的? 数学的本质在于思考, 只有关注这一点, 这样的教学才是真正有效的, 以后学生碰到类似的问题才有章可循.

笔者认为在上述教学中, 应当在第一步前添上以下两步:

第一步: 回忆原型

带领学生回忆本书42页的"探究":

如图7, 要在燃气管道l上修建一个泵站, 分别向A、B两镇供气. 泵站修在管道的什么地方, 可使所用的输气管线最短?



图 7

你可以在l上找几个点试一试, 能发现什么规律?

本题的实质就是下题(以下称为问题2):

直线l同侧有两定点, 在直线上l求作一点, 使该点到已知两定点的距离之和最短.

第二步: 巧妙转化

这一步主要解决如何将问题1转化为问题2, 因此是本题教学的关键.

提问1: 问题1为什么比问题2复杂?

原因很简单: 问题2仅有一个动点, 而问题1却有两个动点P和Q, 涉及两个可变对象, 因此情况较为复杂.

提问2: 如何将问题1转化为问题2?

有了提问1作基础, 就应设法将问题1中的两个动点转化为一个动点, 可先让两个动点P和Q中某一动点暂时保持不动. 比如让点Q暂时保持不动, 这样就只剩一个动点P了, 此时由于BQ的值已"固定", 故问题1就转化为问题2:

直线MN同侧有两定点A和Q, 在直线MN上求作点P, 使$AP+PQ$最短.

这时作点A关于MN的对称点A'(由于点Q实际上是动点, 故不作点Q关于MN的对称点), 连结$A'Q$, 交MN于点P. 而由于点Q实际上是动点, 故$A'Q$与MN的交点P也为动点. 尽管点P并没有确定下来, 但我们却得到了一个很有价值的结论:

点P是$A'Q$与MN的交点, 也就是说A'、P、Q三点共线.

同样, 若将点P暂时保持不动, 此时由于AP的值已"固定", 故问题同样转化为问题2:

直线l同侧有两定点B和P, 在直线l上求作点Q, 使$BQ+PQ$最短.

这时作点B关于l的对称点B'(由于点P实际上是动点, 故不作点P关于l的对称点), 连结$B'P$, 交l于点Q. 而由于点P实际上是动点, 故$B'P$与l的交点Q也为动点. 尽管点Q并没有确定下来, 但我们却得到了点Q是$B'P$与l的交点, 也就是说B'、Q、P三点共线. 从而, 可得A'、P、Q、B'共线. 因此, 点P、Q是$A'B'$与MN和l的交点, 故得到以上作法.

提问3: 上述解题过程是怎样实现将问题1转化为问题2的?

在提问2中实际上已经解决了这一问题: 对于两个动点的问题可以让其中一个动点暂时保持不动. 实际上对某些涉及多个可变对象的数学问题, 先对其中少数对象进行调整, 让其他对象暂时保持不变, 从而化难为易, 取得问题的局部解决. 经过若干次这种局部上的调整, 就能逐步逼近目标, 最终使整个问题得到圆满解决. 设计这一问题的目的是让学生提炼、总结出本题的思想方法, 有了这样的思想方法作为工具, 学生就能举一反三, 对于与这一问题类似的其他问题就知道如何去思考了.

2. 四道中考题的教法简述

有了这道课本习题作基础, 上面所给出的4道中考题的教法只需作简要分析.

例1可以这样教: 可先让点M暂时保持不动, 则线段BM的长固定, 只需使MN最小, 此时$MN\perp AB$. 再让点N暂时保持不动, 则欲$BM+MN$最小, 只需作点N关于线段AD的对称点N'(显然在AC上), 再连结BN', BN'与AD的交点即为点M, 而由$MN\perp AB$可得$MN'\perp AC$, 即$BN'\perp AC$, 从而问题不难解决;

例2、例3可归结为与上述课本习题一样的情形.

例4可以这样教: 如图8, 这里H、K是定点, 而M、N是动点. 可先让点M暂时保持不动, 则线段MK的长固定, 只需$HN+NM$最短, 由点B与点H关于直线l对称, 可得点N为BM与直线l的交点, 从而点B、N、M共线; 再让点N暂时保持不动, 则线段HN的长固定, 只需$NM+MK$最短, 作点K关于直线AE的对称点Q, 同理可得点N、M、Q共线, 于是点B、N、M、Q共线, 点M为QB与直线AE的交点, 点N为QB与直线l的交点.

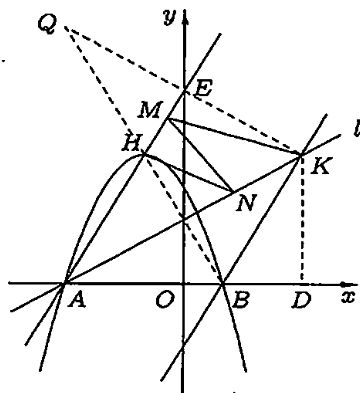


图8

"意料之外"的误解 "情理之中"的探究

——一道高考数列试题引发的课堂风波

068350 河北省丰宁满族自治县实验中学 刘志新

不可小视我们的学生, 有些学生对数学问题不仅仅局限于常规的解答, 而是在你不经意的时候, 让你眼前一亮, 或是措不及防. 他们的那些为什么, 可以使课堂产生意想不到的效果. 在一节数列习题课上, 笔者领略了他们的"风采".

题目 (2010年全国卷I理科第22题) 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$.

(I) 设 $c=\frac{5}{2}$, $b_n=\frac{1}{a_n-2}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(II) 求使不等式 $a_n<a_{n+1}<3$ 成立的 c 的取值范围.

对于第I小题进行合理变形、配凑得到

$$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{4}{a_n-2}+2,$$

构造成 $b_{n+1}=4b_n+2$, 符合 $a_{n+1}=Aa_n+B$ 的递推式, 然后采用待定系数法求得 $\{b_n\}$ 的通项公式. 为行文方便给出 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=-\frac{2}{3}-\frac{4^{n-1}}{3}$.

下面是对第II小题的解答和探究.

一、第一次风波

第II小题的条件 $a_n<a_{n+1}<3$ 为我们的解题留下了广泛的思考空间, 一位同学的迅速解答, 让所有同学为之一震, 解法如下:

因为 $a_n<a_{n+1}<3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递增数列. 由 $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$, 得 $a_{n+1}+\frac{1}{a_n}=c$, 则有 $a_n+\frac{1}{a_n}<a_{n+1}+\frac{1}{a_n}=c$, 即 $c>a_n+\frac{1}{a_n}$, $a_n\in[1,3)$ 恒成立. 令 $t=a_n$, 则 $f(t)=t+\frac{1}{t}$, $t\in[1,3)$, 利用函数 $f(t)=t+\frac{1}{t}$ 在 $t\in[1,3)$ 单调递增, 则 $2\leqslant f(t)<\frac{10}{3}$, 解得 $c\geqslant\frac{10}{3}$.

大多数同学认为这种方法巧妙, 值得借鉴, 并且暗自佩服这位同学的"精彩"解答. 但细心的同学对这种解法提出质疑.

【提出质疑】I中给出 $c=\frac{5}{2}$ 与 $c\geqslant\frac{10}{3}$ 是不是有矛盾?

【定性分析】当 $c=\frac{5}{2}$ 时, $b_n=-\frac{2}{3}-\frac{4^{n-1}}{3}$, 由 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$, 解得 $a_n=2-\frac{1}{\frac{2}{3}+\frac{4^{n-1}}{3}}$, 则数列 $\{a_n\}$ 为增函数, 则必有 $a_n<a_{n+1}<3$, 也就是说 $c=\frac{5}{2}$ 是符合条件的, 这与 $c\geqslant\frac{10}{3}$ 矛盾. 由递推公式 $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$, a_n 的取值范围由 c 与 a_1 共同决定, 而由 $1\leqslant a_n<3$ 确定 c 的取值范围犯了非等价转化的错误. 也就是说只有 $1\leqslant a_n<3$, $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$ 不能充分满足 $a_{n+1}\in[1,3)$, 所以这种方法是不正确的.

【探究溯源】受第I小题模式的启发, 我们可以将问题推广到一般情形, 求出 a_n 的通项公式:

【解析】因为 $a_1=1$, $a_2=c-1$, $a_n<a_{n+1}<3$, 所以 $a_1<a_2<3$, 解得 $2<c<4$. 设 $c=p+\frac{1}{p}$, 不难得出 $p\in(1,2+\sqrt{3})$ 或 $p\in(2-\sqrt{3},1)$.

令 $b_n=\frac{1}{a_n-p}$, 则 $b_{n+1}=\frac{1}{a_{n+1}-p}$,

而 $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$, 得 $b_{n+1}=\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{a_n}}$.

由 $b_n=\frac{1}{a_n-p}$, 化简得 $b_{n+1}=p^2b_n+p$. 设存在实数 λ, 使得 $b_{n+1}+\lambda=p^2(b_n+\lambda)$, 即 $b_{n+1}=p^2b_n+p^2\lambda-\lambda$, 解得 $\lambda=\frac{p}{p^2-1}$. 即数列 $\left\{b_n+\frac{p}{p^2-1}\right\}$ 是以 $b_1+\frac{p}{p^2-1}=\frac{1}{1-p}+$

$\frac{p}{p^2-1}=\frac{1}{1-p^2}$为首项, 公比为$p^2$的等比数列, 所以$b_n+\frac{p}{p^2-1}=\frac{1}{1-p^2}\cdot(p^2)^{n-1}$, 即$b_n=\frac{p^{2n-2}+p}{1-p^2}$.

又由$b_n=\frac{1}{a_n-p}$, 则$a_n=\frac{1-p^2}{p^{2n-2}+p}+p$.

至此我们得出了a_n的通项公式, 并且找到了决定c的取值范围的参数p, 不妨取$p\in(1,2+\sqrt{3})$, 显然数列$\{a_n\}$单调递增, 而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=p$, 则$1<p\leqslant 3$, 由$c=p+\frac{1}{p}$, 令$f(x)=x+\frac{1}{x}$, 利用函数$f(x)$的单调性解得$c\in\left(2,\frac{10}{3}\right]$.

二、一波未平, 一波一起

正当我们为找到数列$\{a_n\}$的通项公式而兴奋时, 标准答案出人意料的解法, 又让同学们欣赏之后议论纷纷.

【标准答案】(Ⅱ)$a_1=1$, $a_2=c-1$, 由$a_2>a_1$得$c>2$.

用数学归纳法证明: 当$c>2$时, $a_n<a_{n+1}$.

(i) 当$n=1$时, $a_2=c-\frac{1}{a_1}>a_1$, 命题成立;

(ii) 设当$n=k$时, $a_k<a_{k+1}$, 则当$n=k+1$时, $a_{k+2}=c-\frac{1}{a_{k+1}}>c-\frac{1}{a_k}=a_{k+1}$.

故由(i), (ii)知当$c>2$时, $a_n<a_{n+1}$.

当$c>2$时, 令$\alpha=\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}$,

由$a_n+\frac{1}{a_n}<a_{n+1}+\frac{1}{a_n}=c$得$a_n<\alpha$.

当$2<c\leqslant\frac{10}{3}$时, $a_n<\alpha\leqslant 3$.

当$c>\frac{10}{3}$时, $\alpha>3$, 且$1\leqslant a_n<\alpha$,

于是$\alpha-a_{n+1}=\frac{1}{a_n\alpha}(\alpha-a_n)\leqslant\frac{1}{3}(\alpha-a_n)$, $\alpha-a_{n+1}\leqslant\frac{1}{3^n}(\alpha-1)$.

当$n>\log_3\frac{\alpha-1}{\alpha-3}$时, $\alpha-a_{n+1}<\alpha-3$, $a_{n+1}>3$.

因此$c>\frac{10}{3}$不符合要求.

所以c的取值范围是$\left(2,\frac{10}{3}\right]$.

【提出质疑】标准答案中“令$\alpha=\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}$”这是为什么?

【理论分析】首先明确一个重要的结论: 单调增加且有上界的数列必有极限.

令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=t$, 则有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=t$,

由$a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$两边取极限,

$$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(c-\frac{1}{a_n}\right),$$

得$t=c-\frac{1}{t}$, 则$t=\frac{c\pm\sqrt{c^2-4}}{2}$.

这里为我们的求解提供了便利, 若求c的取值范围, 应该满足: $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ 1<\frac{c+\sqrt{c^2-4}}{2}\leqslant 3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ 1<\frac{c-\sqrt{c^2-4}}{2}\leqslant 3,\end{cases}$ 解得c的取值范围是$\left(2,\frac{10}{3}\right]$(当然, 这样的解答是否严密, 还有待于去考证、去研究).

三、完美的解答

受“美丽”错误的启示, 我们还是执着于构造函数求参数的取值范围, 经过深入研究、讨论之后, 我们感觉“美丽”的错误就是因为解答过分地牵强, 如果细心玩味, 还是有章可循的.

【解】因为数列$\{a_n\}$是递增数列, 由$a_n<a_{n+1}<3$得$1=a_1<a_2=c-\frac{1}{a_1}=c-1$, 即$c>2$.

$a_n<a_{n+1}<3$, $a_1=1$, $a_{n+1}=c-\frac{1}{a_n}$得$a_n<c-\frac{1}{a_n}$, 即$a_n^2-ca_n+1<0$, $1\leqslant a_n<3$.

将其看成关于a_n的二次函数,

令$f(x)=x^2-cx+1$,

则$f(x)=x^2-cx+1=\left(x-\frac{c}{2}\right)^2-\frac{c^2}{4}+1$,

$$\therefore\begin{cases}\Delta>0,\\ f(3)\geqslant 0,\\ \frac{c}{2}<3,\end{cases}\text{即}\begin{cases}c^2-4>0,\\ 9-3c+1\geqslant 0,\\ \frac{c}{2}<3,\end{cases}$$

解得$c\leqslant\frac{10}{3}$, 所以c的取值范围为$2<c\leqslant\frac{10}{3}$.

解到这里, 我们还没有结束对本题的研究,

(下转第1-20页)

莱洛三角形的轨迹问题
——由一道高考数学题引起的探究

201600　上海市松江二中　张忠旺

2011年高考数学江西卷试题给我们提供了一个具有研究价值的“凸轮沿直线滚动的轨迹问题”.下面我们以此为素材，定量地探究相关点的轨迹问题.

问题　(2011年高考数学江西卷文科卷第10题)如图1，一个“凸轮”放置于直角坐标系x轴上方，其“底端”落在原点O处，一顶点及中心M在y轴的正半轴上，它的外围由以正三角形的顶点为圆心，以正三角形的边长为半径的三段等弧组成．今使“凸轮”沿x轴正向滚动前进，在滚动过程中，“凸轮”每时每刻都有一个“最高点”，其中心也在不断移动位置，则在“凸轮”滚动一周的过程中，将其“最高点”和“中心点”所形成的图形按上、下放置，应大致为 ……………………………（　）

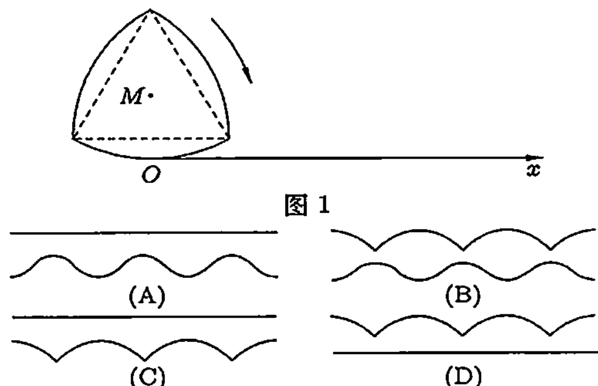


图1

1．问题的解答

点M到x轴的距离按照增大、减小、增大、减小……的规律变化，最高点到x轴的距离一直为圆的半径，所以选(A).

2．问题的背景

本题的“凸轮”叫做“莱洛三角形”，是德国机械工程师莱洛(Reuleaux，1829年至1905年)在研究机械分类时首先指出的，名称也便由此得来．它是一条等宽曲线，即用任意两条平行线去夹逼，平行线间的距离为定值．它可以在边长等于正三角形边长的正方形内自由转动，利用这一性质可以制作出横截面是莱洛三角形的一种方孔钻头.

3．莱洛三角形在直线上滚动时，有关动点的轨迹.

莱洛三角形从起始位置滚动一周的变化图形如图2:

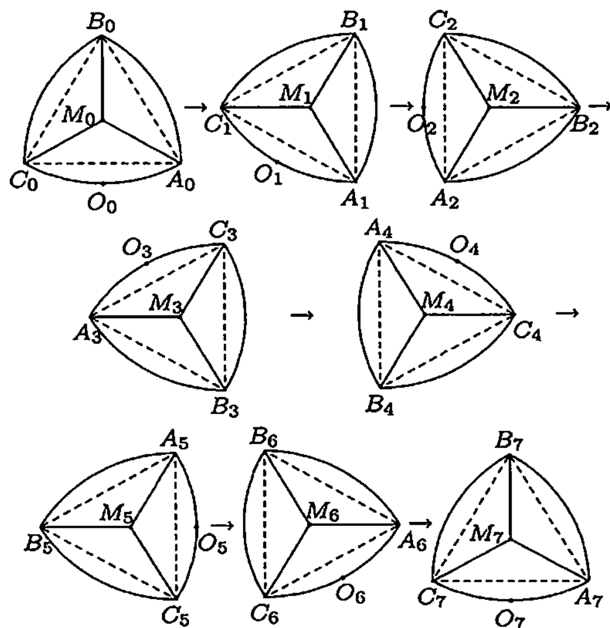


图2

根据图1的变化规律，下面我们探究有关动点的轨迹问题.

3.1　中心M的轨迹

如图3，设正三角形ABC的边长为r．根据图2的变化，在题设坐标系下，点M的轨迹由7段曲线组成.

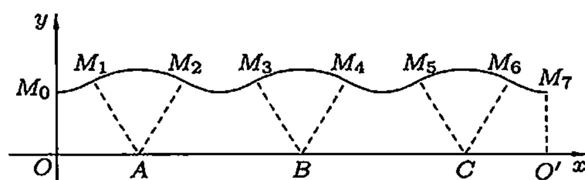


图3

曲线M_0M_1由方程
$$\begin{cases} x=r\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta, \\ y=r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta, \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$确定;

曲线M_1M_2、M_3M_4和M_5M_6都是半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}r$, 圆心角为$\frac{\pi}{3}$的一段圆弧;

曲线M_2M_3、M_4M_5的形状由方程
$$\begin{cases} x=r\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \\ y=r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$$
确定;

曲线M_6M_7的形状由方程
$$\begin{cases} x=r\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \\ y=r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$
确定.

对于图2中的每一变化, 选择x轴上的起点为坐标原点(如图2, $M_2\rightarrow M_3$, 选择A_2为原点), 从起点开始转过的弧度数为参数θ, 即可得到图3中对应曲线的参数方程. 下面我们只给出曲线M_0M_1的参数方程的推导, 曲线M_2M_3、M_4M_5、M_6M_7的参数方程的推导过程类似.

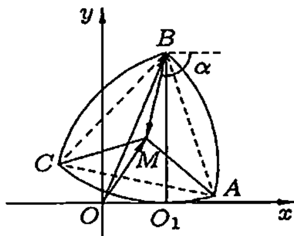


图 4

以点O为坐标原点建立平面直角坐标系, 如图4, 从点O滚动到O_1时, 转过的弧OO_1的弧度数为θ, 则$\angle O_1BM=\theta$. 设点M的坐标为(x,y), 则点M滚动到图4中的位置时, $\alpha=-\frac{\pi}{2}-\theta$. 由$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$得
$$\begin{aligned}(x,y)&=(r\theta,r)+\left(\left|\overrightarrow{BM}\right|\cos\alpha,\left|\overrightarrow{BM}\right|\sin\alpha\right)\\&=(r\theta,r)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta,-\frac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta\right)\\&=\left(r\theta-\frac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta,r-\frac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta\right),\end{aligned}$$
所以M点的参数方程为
$$\begin{cases} x=r\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\sin\theta, \\ y=r-\dfrac{\sqrt{3}}{3}r\cos\theta, \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right).$$

3.2 最低点O的轨迹

当莱洛三角形滚动一周时, 根据图2的变化过程, 在题设坐标系下, 最低点O点的轨迹由7段曲线组成, 如图5.

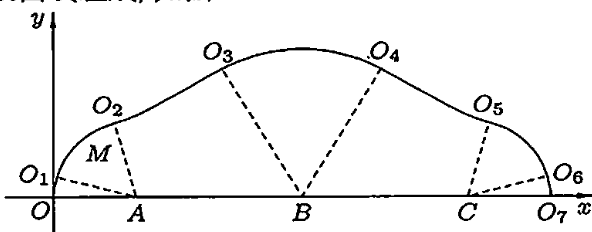


图 5

曲线OO_1由方程
$$\begin{cases} x=r\theta-r\sin\theta, \\ y=r-r\cos\theta, \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$确定;

曲线O_1O_2、O_5O_6都是半径为$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r$, 圆心角为$\frac{\pi}{3}$的一段圆弧;

曲线O_2O_3的形状由方程
$$\begin{cases} x=r\theta-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right), \\ y=r-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right), \end{cases}$$
$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$确定;

曲线O_3O_4是半径为r, 圆心角为$\frac{\pi}{3}$的一段圆弧;

曲线O_4O_5的形状由方程
$$\begin{cases} x=r\theta+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right), \\ y=r-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{12}\right), \end{cases}$$
$\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$确定;

曲线O_6O_7的形状由方程
$$\begin{cases} x=r\theta+r\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \\ y=r-r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right), \end{cases} \left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$确定.

3.3 最高点B的轨迹

莱洛三角形滚动一周时, 根据图2的变化过程, 在题设坐标系下, 最高点B的轨迹由6段曲

线组成, 如图6.

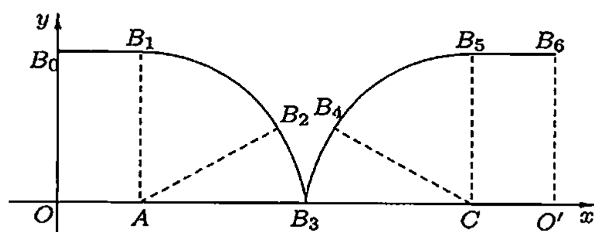


图 6

曲线B_0B_1、B_5B_6的形状由方程

$$\begin{cases} x=r\theta, \\ y=r, \end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$$
确定;

曲线B_1B_2、B_4B_5是半径为r, 圆心角为$\frac{\pi}{3}$的一段圆弧;

曲线B_2B_3的形状由方程

$$\begin{cases} x=r\theta+r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right), \\ y=r-r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right), \end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$$
确定;

曲线B_3B_4的形状由方程

$$\begin{cases} x=r\theta-r\sin\theta, \\ y=r-r\cos\theta, \end{cases}\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$$
确定.

4. 莱洛三角形在正方形内转动时, 有关动点的轨迹

莱洛三角形可以在边长等于正三角形边长的正方形内自由转动, 下面我们探究它的中心M和顶点的轨迹. 为了讨论方便, 以下设正三角形ABC的边长为1.

4.1 中心M的轨迹

图7是莱洛三角形从起始位置逆时针旋转$\frac{\pi}{6}$的变化过程, 此时, M从M_0变化到M_1. 下面求这一过程中点M轨迹的参数方程.

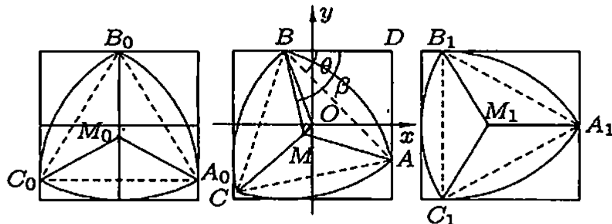


图 7

以正方形的中心为原点建立平面直角坐标系, 如图7(2), 设点M的坐标为(x,y), $\angle ABD=\theta$, 则$\beta=-\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$, $x_B=\frac{1}{2}-\cos\theta$, 由$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$得

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2}-\cos\theta,\frac{1}{2}\right)+\left(\left|\overrightarrow{BM}\right|\cos\beta,\left|\overrightarrow{BM}\right|\sin\beta\right)=\left(\frac{1}{2}-\cos\theta,\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right),-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta\right),$$

所以M点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \end{cases}\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right).$$

消去参数得其普通方程为

$$3x^2+3y^2-3\sqrt{3}xy-\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}x-\frac{3(2-\sqrt{3})}{2}y+\frac{5-3\sqrt{3}}{4}=0.\cdots(1)$$

方程(1)表示的是椭圆, 该椭圆的中心为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 长半轴长为$a=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 短半轴长为$b=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, 焦点在直线$y=x$上. 因此, 曲线$M_0M_1$是椭圆(1)的一段弧(如图8).

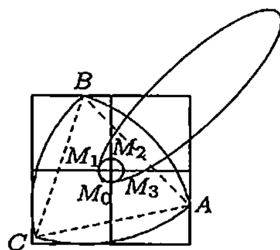


图 8

根据对称性, 可以得到其他三部分$M_1\to M_2$、$M_2\to M_3$、$M_3\to M_0$(如图8)的参数方程.

曲线M_1M_2:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \end{cases}\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right);$$

曲线M_2M_3:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \end{cases}\left(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right);$$

曲线M_3M_0:

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta, \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\cos\theta, \end{cases} \left(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right).$$

以上三个方程对应的曲线都是与椭圆(1)对称椭圆上的一段弧, 因此, 中心M的轨迹是由来自以上四个对称椭圆的四段弧组成的(如图8).

4.2 顶点的轨迹

莱洛三角形在正方形内转动时, 顶点A、B、C在正方形的四个顶点拐弯处画出四段弧, 莱洛三角形的活动区域是圆角方形区域, 如图9. 下面我们来求每段弧的参数方程.

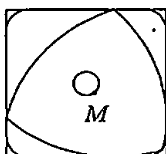


图 9

先求在点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$拐角处的弧的参数方程.

如图7(2), 设点C的坐标为(x,y), 由$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$得

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2}-\cos\theta,\frac{1}{2}\right)+\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right),-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta,\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right),$$

所以点C的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta, \\ y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta, \end{cases} \left(\frac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right).$$

消去参数得其普通方程为$x^2+y^2-\sqrt{3}xy-\frac{2-\sqrt{3}}{2}x-\frac{2-\sqrt{3}}{2}y+\frac{1-\sqrt{3}}{4}=0$. ⋯⋯⋯⋯(2)

方程(2)表示的是椭圆, 该椭圆的中心为$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, 长半轴长为$a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$, 短半轴长为$b=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$, 焦点在直线$y=x$上. 因此, 在点$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$拐角处的曲线是椭圆(2)的一段弧, 如图10.

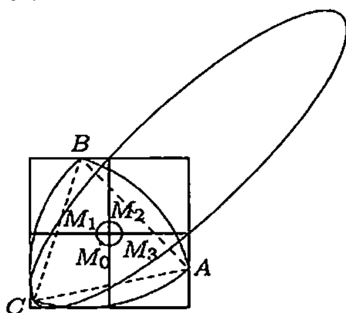


图 10

根据对称性, 容易写出正方形其他三个顶点拐角处的弧的参数方程, 它们是与椭圆(2)对称的椭圆上的一段弧, 这里从略.

另外, 还可以进一步探究莱洛三角形运动中其他点的轨迹和有关曲线围成的面积等问题, 限于篇幅, 不再赘述.

我们通过试验、探究, 对莱洛三角形的运动进行了定量描述, 得到了新的发现. 这不仅丰富了我们对莱洛三角形的认识, 也为培养学生的创新能力提供了很好的素材. 在教学中, 只有不断尝试, 坚持探究, 才能有所提高, 有所突破, 有所收获.

参考文献

[1] 蒋声. 形形色色的曲线[M]. 上海: 上海教育出版社, 1999.

[2] 何晓禹, 余继光. 一道高考数学题引起的研究性学习[J]. 数学教学, 2011(3): 43-46.

(上接第1-16页)

我们还应对当$2<c\leqslant\frac{10}{3}$是否能够得到$a_n<a_{n+1}<3$给予必要的验证, 通过验证是成立的.

通过对本题的研究, 同学们陶醉在这和谐、辩证、统一的数学求解、探索的氛围之中, 可能一个美丽的错误, 一个意料之外的解答打乱了预设的课堂, 但那些在情理之中的论证, 却让我们有那么多的收获.

一道"卓越联盟"自主招生试题的赏析与探究

721006 陕西省宝鸡市姜城中学 康海明

卓越联盟(指由北京理工大学、大连理工大学、东南大学、哈尔滨工业大学、湖南大学、华南理工大学、天津大学、同济大学、西北工业大学、重庆大学10所工科高校组成的高校合作联盟)2011年自主招生数学第11题是:

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(1) 设$b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明: 若$a\neq b$, 则$\{b_n\}$是等比数列;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=4$, 求$a$, b的值.

一、试题赏析

1. 试题分析

此类问题求解的关键是由二阶线性递推关系$a_{n+2}=f(a_{n+1},a_n)$求其通项. 本题中连续三项之间的关系: $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, 其几何意义是: a_{n+2}是数轴上两端点坐标为a_n和a_{n+1}的线段中点的坐标(如图1). 由图1不难看出:

a_n a_{n+2} a_{n+1}

图1

① $a_{n+1}-a_{n+2}=a_{n+2}-a_n$,

② $a_{n+1}-a_{n+2}=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$,

③ $a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$,

④ $2(a_{n+2}-a_{n+1})=-(a_{n+1}-a_n)$.

在本题中$a=0$, $b=a$时, 即为2002年北京春季高考第22题.

2. 试题解决

解法一: 证: (1) 由$2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$

得$2(a_{n+2}-a_{n+1})=-(a_{n+1}-a_n)$,

令$b_n=a_{n+1}-a_n$, 则$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n$.

$\therefore$ $\{b_n\}$是首项为$b-a$, 公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

解: (2) 由(1)知, $b_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot b_1$,

即$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$.

$\therefore$ $a_2-a_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^{1-1}(b-a)$,

$a_3-a_2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-1}(b-a)$,

$\cdots\cdots$,

$a_{n+1}-a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$.

以上各式相加, 得

$$a_{n+1}-a_1=(b-a)\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)},$$

$$a_{n+1}=a+\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right],$$

即$a_n=a+\frac{2}{3}(b-a)\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$,

$\therefore$ $a_1+a_2+\cdots+a_n$

$$=na+\frac{2}{3}(b-a)\left[n-\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=na+\frac{2}{3}(b-a)n-\frac{4}{9}(b-a)+\frac{4}{9}(b-a)\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+\cdots+a_n)=4$, 得$a+\frac{2}{3}(b-a)=0$, $-\frac{4}{9}(b-a)=4$,

$\therefore$ $a=6$, $b=-3$.

解法二: (1) 略; (2) 由试题分析可知:

$a_{n+2}+\frac{1}{2}a_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$,

即$\left\{a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n\right\}$为常数列.

$\therefore a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=\frac{a+2b}{2}$,

$\therefore a_{n+1}-\frac{a+2b}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{a+2b}{3}\right)$,

$\therefore \left\{a_n-\frac{a+2b}{3}\right\}$是以$a_1-\frac{a+2b}{3}=\frac{2(a-b)}{3}$为首项, 公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列.

则$a_n=\frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{a+2b}{3}$(以下略).

3. 试题发展

发展1 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $c_n=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n$. 求证: $\{c_n\}$为常数列.

发展2 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $d_n=a_n-\frac{a+2b}{3}$. 求证: $\{d_n\}$为等比数列.

发展3 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$, $f_n=2^{n+1}a_{n+1}+2^na_n$. 求证: $\{f_n\}$为等比数列.

发展4 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$ $(a<b)$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求证: $a_{2n+1}<a_{2n}<a_{2n-2}$.

发展5 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$ $(a<b)$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求证: 数列$\{a_{2n-1}\}$单调递增.

发展6 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$ $(a<b)$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求证: 数列$\{a_{2n}\}$单调递减.

二、试题探究

一般的二阶线性递推数列$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$ $(q\neq 0,\ n=3,4\cdots\cdots)$ $(*)$, 称一元二次方程$x^2=px+q$为$(*)$式的特征方程.

(1) 若特征方程有两个不同的根x_1、x_2 $(x_1\neq x_2)$, 由韦达定理$x_1+x_2=p$, $x_1x_2=-q$.

$\therefore$ $(*)$式可记为

$a_n=(x_1+x_2)a_{n-1}-x_1x_2a_{n-2}$.

得到

$a_n-x_1a_{n-1}=x_2(a_{n-1}-x_1a_{n-2})$,

$a_n-x_2a_{n-1}=x_1(a_{n-1}-x_2a_{n-2})$.

从而

$a_{n+1}-x_1a_n=x_2^{n-1}(a_2-x_1a_1)$,……… ①

$a_{n+1}-x_2a_n=x_1^{n-1}(a_2-x_2a_1)$.……… ②

② − ①得

$a_n=\frac{a_2-x_2a_1}{x_1-x_2}x_1^{n-1}-\frac{a_2-x_1a_1}{x_1-x_2}x_2^{n-1}$.

(2) 若特征方程有两个相等的根, 即$x_1=x_2$, 则

$a_n-x_1a_{n-1}=x_1^{n-2}(a_2-x_1a_1)$,

$x_1a_{n-1}-x_1^2a_{n-2}=x_1^{n-2}(a_2-x_1a_1)$,

$x_1^2a_{n-2}-x_1^3a_{n-3}=x_1^{n-2}(a_2-x_1a_1)$,

……,

$x_1^{n-2}a_2-x_1^{n-1}a_1=x_1^{n-2}(a_2-x_1a_1)$,

上述各式相加, 得

$a_n=x_1^{n-1}a_1+(n-1)x_1^{n-2}(a_2-x_1a_1)$.

综上, 令$A=\frac{a_2-x_2a_1}{x_1-x_2}$, $B=\frac{a_2-x_1a_1}{x_1-x_2}$, $\alpha=a_1$, $\beta=\frac{a_2-x_1a_1}{x_1}$, 可得下面的

定理 设二阶线性递推数列$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$ $(n=3,4,\cdots)$的特征方程$x^2-px-q=0$的两根为x_1、x_2, 则

(I) 当$x_1\neq x_2$时, $a_n=Ax_1^{n-1}-Bx_2^{n-1}$;

(II) 当$x_1=x_2$时, $a_n=[\alpha+\beta(n-1)]x_1^{n-1}$.

例1 (卓越联盟2011年自主招生数学第11题) 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$, $a_2=b$, $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(1) 设$b_n=a_{n+1}-a_n$, 证明: 若$a\neq b$, 则$\{b_n\}$是等比数列;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=4$, 求$a$, b的值.

解: 特征方程是$2x^2-x-1=0$, 特征根为$x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$.

$\therefore a_n=A\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-B(1)^{n-1}$

$=A\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-B$.

由$a_1=a$, $a_2=b$,

得$A=-\frac{2(b-a)}{3}$, $B=-\frac{a+2b}{3}$,

则$a_n=\frac{2(a-b)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{a+2b}{3}$.

例2 (2002年北京春季高考第22题) 已知点的序列$A_n(x_n,0)$, $n\in\mathbf{N}^*$,其中$x_1=0$, $x_2=a$ $(a>0)$, A_3是线段A_1A_2的中点, A_4是线段A_2A_3的中点, ……, A_n是线段$A_{n-2}A_{n-1}$的中点……. 求$\{x_n\}$的通项公式.

(下转第1-26页)

分四边形

200050 上海市第三女子中学 夏德凡

蒋声老师的书《趣味平面几何》中有一节内容为《九分之一》，讲的是将四边形的各边三等分，然后对边对应分点相连结，于是四边形被分成了九部分，那么中间一个四边形的面积恰好为原四边形面积的九分之一. 结论非常有趣，不禁令人遐想. 本文试对此命题的一般性作探究.

一、等分四边形的一组对边，依次连结对边分点所得四边形的面积

命题1 如图1，点C_1、C_2、A_1、A_2分别为对边BC、DA的三等分点，那么$S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

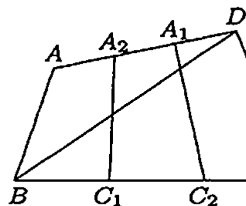


图1

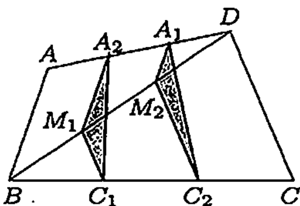


图2

证明：依次取BD的三等分点M_1、M_2（如图2)，则$S_{\triangle DA_1M_2}:S_{A_1M_2M_1A_2}:S_{M_1A_2AB}=1:3:5$, $S_{A_1M_2M_1A_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}$;

$S_{\triangle BC_1M_1}:S_{C_1M_1M_2C_2}:S_{M_2C_2CD}=1:3:5$, $S_{C_1M_1M_2C_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}$;

那么，$S_{C_1M_1M_2C_2}+S_{A_1M_2M_1A_2}$

$=\frac{1}{3}S_{ABCD}$. ……………………(1)

因为$M_1A_2/\!/A_1M_2$, $C_1M_1/\!/M_2C_2$,

所以$\angle A_1M_2C_2=\angle C_1M_1A_2$，且

$\frac{C_1M_1}{M_2C_2}=\frac{A_1M_2}{M_1A_2}=\frac{1}{2}$.

从而$S_{\triangle A_2C_1M_1}=S_{\triangle C_2A_1M_2}$. …………(2)

由(1)、(2)可得，$S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

进而可得，图3中$S_{阴影}=\frac{2}{3}S_{ABCD}$.

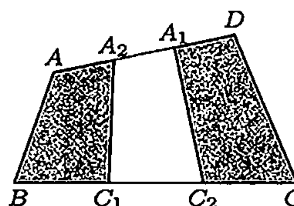


图3

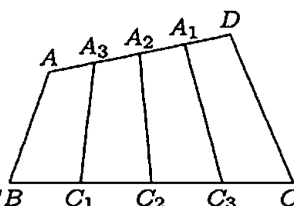


图4

类似可证：

命题2 如果点C_1、C_2、C_3、A_1、A_2、A_3分别为对边BC、DA的四等分点（如图4)，那么

$S_{A_1A_3C_1C_3}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

进而可得图5中$S_{阴影}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

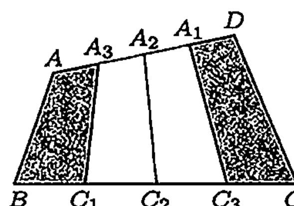


图5

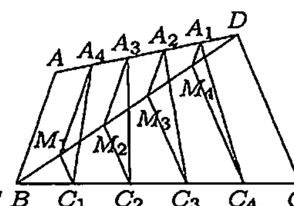


图6

仿照命题1，可得

命题3 如果点C_1、C_2、C_3、C_4、A_1、A_2、A_3、A_4分别为对边BC、DA的五等分点（如图6)，那么

$S_{A_3A_2C_3C_2}=\frac{1}{5}S_{ABCD}$,

$S_{A_4A_1C_4C_1}=\frac{3}{5}S_{ABCD}$,

$S_{AA_4C_1B}+S_{A_1DCC_4}=\frac{2}{5}S_{ABCD}$.

仿照命题2，可得

命题4 如果点C_1、C_2、C_3、C_4、C_5、A_1、A_2、A_3、A_4、A_5分别为对边BC、AD的六等分点（如图7)，那么$S_{A_4A_2C_4C_2}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$,

$S_{A_5A_1C_5C_1}=\frac{2}{3}S_{ABCD}$,

$S_{AA_5C_1B}+S_{A_1DCC_5}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

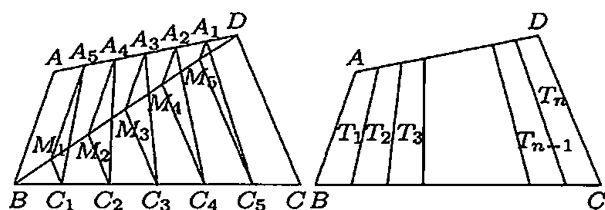


图 7

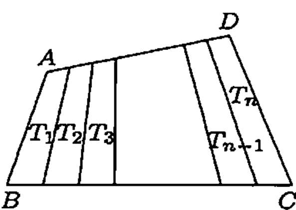


图 8

一般地, 设四边形 $ABCD$ 的面积为 T, C_i、$A_i\,(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为 BC、DA 的 n 等分点, 依次将四边形 $ABCD$ 分成 n 个四边形, 其面积依次记为 $T_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ (如图8), 可得以下命题:

命题5 (1) 如果 $n=2k-1\,(k\geqslant 1, k\in\mathbf{N}^*)$, 那么

$T_k=\frac{1}{n}T$,

$T_{k-i}+\cdots+T_k+\cdots+T_{k+i}=\frac{2i+1}{n}T\,(1\leqslant i\leqslant k-1, k\in\mathbf{N}^*)$,

$T_{k-i}+T_{k+i}=\frac{2}{n}T\,(1\leqslant i\leqslant k-1, k\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 如果 $n=2k\,(k\geqslant 1, k\in\mathbf{N}^*)$, 那么

$T_k+T_{k+1}=\frac{2}{n}T$, $T_{k-i}+\cdots+T_k+\cdots+T_{k+1}+\cdots+T_{k+1+i}=\frac{2(i+1)}{n}T\,(0\leqslant i\leqslant k-1, k\in\mathbf{N}^*)$,

$T_{k-i}+T_{k+1+i}=\frac{2}{n}T\,(0\leqslant i\leqslant k-1, k\in\mathbf{N}^*)$.

二、等分四边形的两组对边(份数相等), 依次连结对边分点所得若干小四边形的顶点位置

引理 将四边形 $ABCD$ 各边 $n\,(n\geqslant 2)$ 等分, 对边 AB、CD 第 k 对等分点的连线段 A_kC_k 与另一组对边 BC、AD 的第 i 对等分点的连线段 B_iD_i 的交点为 M_{ki}, 那么 M_{ki} 是 A_kC_k 的第 i 个等分点, 是 B_iD_i 的第 k 个等分点, 其中 $1\leqslant k, i\leqslant n-1$ (如图9).

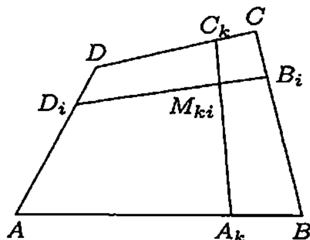


图 9

证明: 设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DA}=\vec{d}$,

则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$,

$$\overrightarrow{B_iD_i}=\frac{n-i}{n}\vec{b}+\vec{c}+\frac{n-i}{n}\vec{d}=\frac{n-i}{n}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)+\vec{c},$$

$$\overrightarrow{A_kC_k}=\frac{n-k}{n}\vec{a}+\vec{b}+\frac{n-k}{n}\vec{c}=\frac{n-k}{n}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}.$$

不妨设点 M 是 A_kC_k 的第 i 个等分点, 则

$$\overrightarrow{C_kM}=-\frac{n-i}{n}\overrightarrow{A_kC_k}=-\frac{n-i}{n}\left[\frac{n-k}{n}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}\right],$$ 则

$$\overrightarrow{B_iM}=\frac{n-i}{n}\vec{b}+\frac{n-k}{n}\vec{c}-\frac{n-i}{n}\left[\frac{n-k}{n}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}\right]$$
$$=\frac{n-k}{n}\vec{c}-\frac{n-i}{n}\cdot\frac{n-k}{n}(\vec{a}+\vec{c})$$
$$=\frac{n-k}{n}\left[\vec{c}-\frac{n-i}{n}(\vec{a}+\vec{c})\right]$$
$$=\frac{n-k}{n}\left(\frac{i}{n}\vec{c}-\frac{n-i}{n}\vec{a}\right)$$
$$=\frac{n-k}{n}\left[\frac{i}{n}\vec{c}+\frac{n-i}{n}\left(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\right)\right]$$
$$=\frac{n-k}{n}\left[\frac{n-i}{n}\left(\vec{b}+\vec{d}\right)+\vec{c}\right],$$

所以 $\overrightarrow{B_iM}=\frac{n-k}{n}\overrightarrow{B_iD_i}$, 说明 A_kC_k 的第 i 个等分点在线段 B_iD_i 上, 且为 D_iB_i 的第 k 个分点, 点 M 即为点 M_{ki}, 从而命题得证.

由引理可知:

如果四边形 $ABCD$ 的各边分别被 n 等分, AB、DC 上的分点依次记为 A_k、$C_k\,(1\leqslant k\leqslant n-1)$, BC、AD 上的分点依次记为 B_i、$D_i\,(1\leqslant i\leqslant n-1)$, 顺次连结 A_kC_k、$B_iD_i\,(1\leqslant k,i\leqslant n-1)$, 那么 A_kC_k、B_iD_i 上所有的交点依次为它们的一个 n 等分点 (如图10所示).

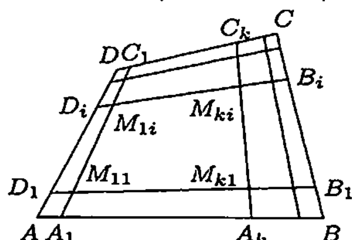


图 10

三、等分四边形的两组对边(份数相等)，依次连结对边分点所得若干小四边形的面积性质

将面积为T的四边形$ABCD$的各边分别n等分，顺次连结A_kC_k、B_iD_i $(1\leqslant k,i\leqslant n-1)$得到$n^2$个小四边形，为叙述方便，依从左至右、从上往下的顺序，将它们的面积记为T_{ki} $(1\leqslant k,i\leqslant n)$，$k$、$i$分别表示相应四边形所在的行和列.

1. 当$n=2, 3, 4$时的几个简单结论

(1) 当$n=2$时，四边形$ABCD$被分成四个小四边形(如图11). 依次连结点A_1、B_1、C_1、D_1，由三角形中位线性质$S_{\triangle AA_1D_1}+S_{\triangle CB_1C_1}=S_{\triangle BA_1B_1}+S_{\triangle DD_1C_1}=\frac{1}{4}T$，由平行四边形性质$S_{\triangle M_{11}A_1D_1}+S_{\triangle M_{11}B_1C_1}=S_{\triangle M_{11}A_1B_1}+S_{\triangle M_{11}D_1C_1}=\frac{1}{4}T$，所以$T_{11}+T_{22}=T_{21}+T_{12}=\frac{1}{2}T$.

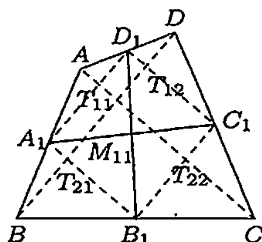


图 11

(2) 当$n=3$时，四边形$ABCD$被分成九个小四边形(如图12). 由命题1可知，

① $\sum\limits_{k=1}^{3}T_{2k}=\sum\limits_{i=1}^{3}T_{i2}=\frac{1}{3}T$;

又$T_{22}=\frac{1}{3}\sum\limits_{k=1}^{3}T_{2k}=\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{3}T_{i2}$,

可得

② $T_{22}=\frac{1}{9}T$, $T_{12}+T_{21}+T_{23}+T_{32}$

$=T_{11}+T_{13}+T_{31}+T_{33}=\frac{4}{9}T$,

环绕四边形T_{22}的所有四边形的面积

$\sum\limits_{i=1}^{3}\left(\sum\limits_{k=1}^{3}T_{ki}\right)-T_{22}=\frac{8}{9}T$.

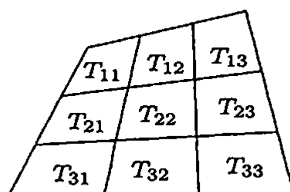


图 12

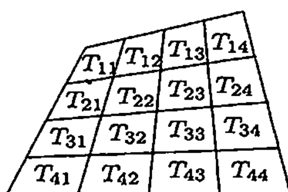


图 13

(3) 当$n=4$时，四边形$ABCD$被分成十六个小四边形(如图13).

由命题2可知，

$$\sum_{i=2}^{3}\left(\sum_{k=1}^{4}T_{ki}\right)=\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{4}T_{ki}\right)=\frac{1}{2}T,$$

$$T_{22}+T_{23}+T_{32}+T_{33}=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{3}\left(\sum_{i=1}^{4}T_{ki}\right),$$

所以

(1) $T_{22}+T_{23}+T_{32}+T_{33}=\frac{1}{4}T$;

(2) $T_{21}+T_{24}+T_{31}+T_{34}=\frac{1}{4}T$; $T_{12}+T_{13}+T_{42}+T_{43}=\frac{1}{4}T$; $T_{11}+T_{14}+T_{41}+T_{44}=\frac{1}{4}T$,

环绕中间四个小四边形的所有四边形的面积

$$\sum_{i=1}^{4}\left(\sum_{k=1}^{4}T_{ki}\right)-(T_{22}+T_{23}+T_{32}+T_{33})=\frac{3}{4}T.$$

2. 当$n\geqslant 5$时，环形四边形的性质

我们定义环形四边形:

(1) 如果n为奇数，不妨设$n=2k-1$ $(k\in\mathbf{N}^*)$，那么n^2个四边形分成k个环形四边形，如图14. 第k行第k列的四边形为第一环形四边形，环绕第一环形四边形的8个四边形称为第二环形四边形，环绕第二环形四边形的16个四边形构成第三环形四边形，依次类推，第$i+1$环形四边形是第i环外的$8i$ $(i\in\mathbf{N}^*, i\leqslant k)$个相邻的四边形，第$k$环四边形是最外层的所有四边形.

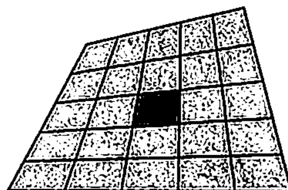


图 14

记第i个环形四边形的面积为S_i $(i\in\mathbf{N}^*, i\leqslant k)$,

根据命题5(1)，第k行所有四边形的面积和为$\frac{1}{n}T$，而S_1是第k行所有四边形面积和的$\frac{1}{n}$，从而$S_1=\left(\frac{1}{n}\right)^2T$;

第$k-i$行至第$k+i$行的面积为$\frac{2i+1}{n}T$，而$S_1+S_2+\cdots+S_{i-1}+S_i+S_{i+1}$的面积是第$k-$

i行至第$k+i$行的面积的$\frac{2i+1}{n}$, 从而$S_1+S_2+\cdots+S_{i-1}+S_i+S_{i+1}=\left(\frac{2i+1}{n}\right)^2T$.

所以, 当$n=2k-1\,(k\in\mathbf{N}^*)$时, 第$i$个环形四边形的面积为

$$S_i=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2T, & i=1,\\ \dfrac{8(i-1)}{n^2}T, & 2\leqslant i\leqslant k.\end{cases}$$

很显然, $n=3$, $n=5$是上述情形的特例.

(2) 如果n为偶数, 不妨设$n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$, 那么n^2个四边形分成k个环形四边形, 如图15. 位于第k、$k+1$行且第k、$k+1$列的四个四边形为第一环形四边形, 环绕第一环形四边形的相邻的12个四边形称为第二环形四边形, 环绕第二环形四边形的20个四边形构成第三环形四边形, 依次类推, 第$i+1$环形四边形是第i环外的$4(2i+1)\,(i\in\mathbf{N}^*, i\leqslant k)$个相邻的四边形, 第$k$环四边形是最外层的所有四边形.

根据命题5(2), 第k、$k+1$行所有四边形的

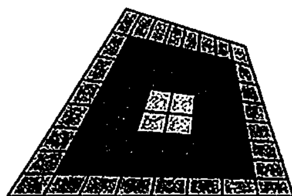


图 15

面积为$\frac{2}{n}T$, 而S_1是第k、$k+1$行所有四边形面积的$\frac{2}{n}$, 从而$S_1=\left(\frac{2}{n}\right)^2T$;

第$k+1-i$行至第$k+i$行的所有四边形面积为$\frac{2i}{n}T$, 而$S_1+S_2+\cdots+S_{i-1}+S_i$的面积是第$k+1-i$行至第$k+i$行所有四边形面积的$\frac{2}{n}i$, 从而$S_1+S_2+\cdots+S_{i-1}+S_i=\left(\frac{2i}{n}\right)^2T$.

所以, 当$n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$, 第$i\,(1\leqslant i\leqslant k)$个环形四边形的面积为

$$S_i=\frac{4}{n^2}(2i-1)T.$$

很显然, $n=2$, $n=4$都是上述情形的特例.

参考文献

[1] 蒋声, 陈瑞琛. 趣味解析几何[M]. 上海: 上海教育出版社, 2007.

(上接第1-22页)

解: 由题意可知 $2x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$, 特征方程 $2x^2-x-1=0$, 两根为$-\frac{1}{2}$、1.

$$\therefore x_n=A\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-B(1)^{n-1}=A\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-B,$$

由$x_1=0$, $x_2=a$得$A=-\frac{2a}{3}$, $B=-\frac{2a}{3}$, 则$x_n=-\frac{2a}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2a}{3}$.

例3 (北师大版高中课本必修3 P.99例10) 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解: 特征方程为$x^2-x-1=0$, 两根为

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore a_n=A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

由$a_1=0$, $a_2=1$得, $A=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $B=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

$(n\geqslant 1)$.

结束语

$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}$型数列问题对学生的能力要求较高, 特别是运算能力、归纳猜想能力、转化能力、逻辑推理能力. 若特征方程$x^2-px-q=0$的两根为x_1、x_2. 当$x_1\neq x_2$时, 可构造等比数列模型; 当$x_1=x_2$时, 可构造累加模型. 由数列递推公式求通项, 一般方法就是对所给递推公式进行化归、转化, 将其结构和形式赋予新的数学意义, 即构造等比数列模型、等差数列模型、累加模型或累乘模型, 也就是构造新数列思想, 或者根据前几项归纳、猜想、证明求得通项公式. 它是一种具有创造性的解题方法.

试用几何建模求最值

443300 湖北省宜都市外国语学校 范 鸿

文[1]是关于2009年北京市中考数学最后一道压轴题第(3)小题的分析与看法,作者认为该题提供的解答没有理论根据,在课本中找不到相关的或近似的模型或演变的相近方式,得出的结论也有相当的偶然性和较多的投机成分.文[1]详细地论述了采用勾股定理表达路径结合行程问题,转化出相应的时间,通过构建方程模型利用一元二次方程根的判别式求出最短时间,文[1]认为这与现行教材淡化一元二次方程根的判别式的背景不相适应,所以此题作为中考压轴题有失公允.笔者仔细地阅读了全文,并对此题进行了思考,下面谈谈自己的一些看法.

为了便于叙述,先看该题及第(3)小题的参考解答.

题目 (2009北京市中考压轴题)如图1,在平面直角坐标系xOy中,$\triangle ABC$三个顶点的坐标分别为$A(-6,0)$,$B(6,0)$,$C(0,4\sqrt{3})$,延长AC到点D,使$CD=\frac{1}{2}AC$,过D点作$DE/\!/AB$交BC的延长线于点E.

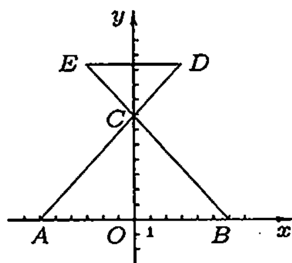


图1

(1)求点D的坐标;

(2)作点C关于直线DE的对称点F,分别连结DF、EF,若过B点的直线$y=kx+b$将四边形$CDFE$分成周长相等的两个四边形,确定此直线的解析式;

(3)设G为y轴上一点,点P从直线$y=kx+b$与y轴的交点出发,先沿y轴到达G点,再沿GA到达A点,若P点在y轴上运动的速度是它在直线GA上运动速度的2倍,试确定G点的位置,使P点按照上述要求到达A点所用的时间最短.(要求:简述确定G点位置的方法,但不要求证明).

解析:第(1)、(2)小题略.第(3)小题确定点G位置的方法:如图2,由(2)知直线$y=kx+b$与y轴的交点为$M(0,6\sqrt{3})$.过点A作$AH\perp BM$于点H,则AH与y轴的交点为所求的点G.

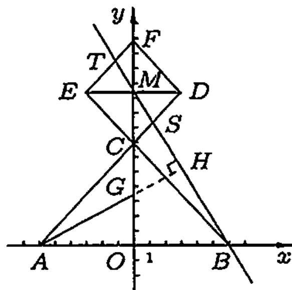


图2

由$OB=6$,$OM=6\sqrt{3}$,可得$\angle OBM=60^\circ$,$\therefore\ \angle BAH=30^\circ$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OAG$中,$OG=AO\cdot\tan\angle BAH=2\sqrt{3}$.

$\therefore$ 点G的坐标为$(0,2\sqrt{3})$(或点G的位置为线段OC的中点).

笔者阅读此题后作了这样的解析:根据题意,在y轴上的线段OM之外确定的点G的位置不符合条件,考虑到点P在线段MG上的速度大于在线段GA上的速度,显然点G应在线段OM上的某一点(不包括端点).设点P在GA上的速度为v,则在MG上的速度为$2v$,那么点P走完全程的时间为$T=\frac{GA}{v}+\frac{GM}{2v}=\frac{GA+\frac{1}{2}GM}{v}$.因为$v$不变,所以当分子$GA+\frac{1}{2}GM$取最小值时,时间最短.根据在$\mathrm{Rt}\triangle OBM$中,$OB=6$,

$OM = 6\sqrt{3}$, 可得$\angle BMO = 30°$, 于是想到构造$\frac{1}{2}MG$. 过点G作$GH \perp BM$于点H, 则根据"在直角三角形中, 30°所对的直角边是斜边的一半"得到$GH = \frac{1}{2}GM$. 显然, 只有当A、G、H三点共线时, $AG + GH$最短, 即$GA + \frac{1}{2}GM$的值最小(这就是参考答案中为什么要"过点A作$AH \perp BM$于点H, 则AH与y轴的交点为所求的G点"的理由). 在$\mathrm{Rt}\triangle OAG$中, $\angle BAH = 30°$, $OG = AO \times \tan\angle BAH = 2\sqrt{3}$, 因此点$G$的坐标为$(0, 2\sqrt{3})$. 不难看出, 此题的本质仍然是一个求最短距离问题, 只不过是将速度比问题转化为线段的长度比问题.

此类问题早在2001年张奠宙、戴再平两位先生所编的《初中数学应用问题》中有过类似的例题. 原题是: 一条笔直的公路l穿过草原, 公路边有一卫生站A, 距离公路30千米的地方有一居民点B, 点A、B的直线距离是90千米. 有一天, 某司机驾车从卫生站送一批急救药品到居民点B, 汽车在公路上的最快速度是60千米/时, 而在草原上的最快速度为30千米/时, 问该司机应以怎样的路线行驶, 所用的行车时间最短? 最短的时间是多少?

解析: 由于草地上的车速较慢, 如果利用一段公路, 即使路途较长, 而时间有可能比直接从草地上到居民点B要短, 那么在何处离开公路最好呢? 如图3, 点A、B直线距离$AB = 90$千米, 居民点B到公路的距离$BC = 30$千米. 假设在P处离开公路, 再从草地开往居民点B, 行车时间为$\frac{AP}{60} + \frac{PB}{30} = \frac{\frac{1}{2}AP + PB}{30}$, 要使行车时间最短, 则必须$\frac{1}{2}AP + PB$最小. 注意到$\sin 30° = \frac{1}{2}$, 于是过点$A$作$\angle CAE = 30°$, 过点$P$作$PF \perp AE$于点$F$, 则构造了$\frac{1}{2}AP = PF$. 这样转化后, 从公路再经过草地的行车所需时间相当于草地行车路程为$(PB + PF)$所需时间. 当P、B、F三点共线, 即$PB + PF$成为过点B到AE的垂线段BG时最短, 此时点P是BG与AC的交点D, 接下来就可用直角三角形相关知识去求最短行车时间$\frac{BD + DG}{30} = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$(小时).

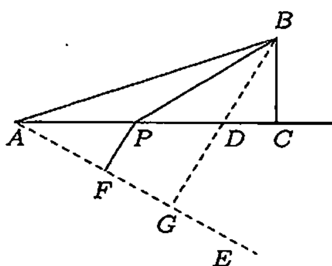


图3

如图3, 考虑到行车时间为$\frac{AP}{60} + \frac{PB}{30} = \frac{AP + 2PB}{60}$, $\angle CBD = \angle CAE$, 于是有了第二种解法. 如图4, 先作$\angle CBD = 30°$交AC于点D, 再过点B作$BE \perp BD$交AC的延长线于点E, 易知$\angle E = 30°$, 这样$DE = 2BD$, 再用直角三角形相关知识去求最短行车时间$\frac{AD + DE}{60}$即可.

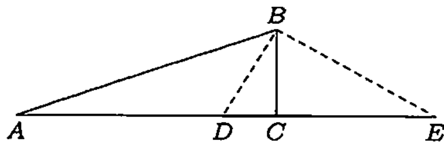


图4

从以上两题的解析不难看出, 此类问题将速度比转化为线段比之后, 回归到讨论折线段最短问题, 寻求"化折为直"或"三点共线"过程, 往往依据"垂线段最短"或"两点之间, 线段最短"等理论支撑. 下面从一般性来探讨此类问题的几何建模.

如图5, 质点离开AC运动到B的速度和在AC上运动的速度之比为$\frac{v_1}{v_2} = \frac{1}{n}$, 在$AC$上任取一点$M$, 以点$M$为圆心, 以$AM$为半径作$\odot M$, 与$AC$交于点$N$, 再以$N$为圆心, 以$\frac{1}{n}AN$为半径作$\odot N$, 与$\odot M$交于点$E$, 作射线$AE$, 这样使得$\sin\angle CAE = \frac{1}{n}$.

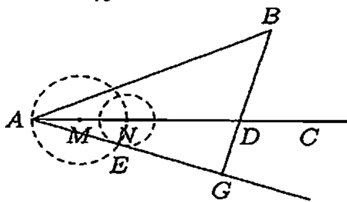


图5

最后过B作$BG \perp AE$分别交AC、AE于点

D、G, 那么从A到B的最短时间为$\frac{BD+DG}{v_1}$.

此外, 我们还可以从另一个角度寻找中考题第(3)小题的几何建模. 如图6, 设Q是y轴上的一点, 点P在y轴上运动的速度为v, 则点P沿$M\to Q\to A$运动的时间为$\frac{MQ}{2v}+\frac{AQ}{v}$, 要使$P$点到达$A$点所用的时间最短, 就是要$MQ+2AQ$最小.

$\because BQ=AQ$, $\therefore$ 要使$MQ+2AQ$最小, 就是$MQ+AQ+BQ$最小, 就是在直线MO上找点G使它到A、B、M三点的距离之和最小, 这就是一个"费马点"问题的变形, 注意到题目中等边$\triangle MAB$, 考虑作旋转变换.

如图6, 把$\triangle MQB$绕点B顺时针旋转60°, 得到$\triangle M'Q'B$, 连结QQ'、MM', 可知$\triangle QQ'B$、$\triangle MM'B$都是等边三角形, 则$QQ'=BQ$.

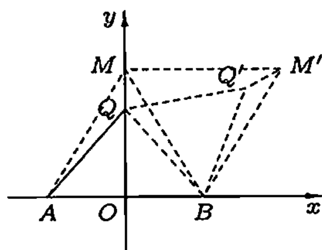


图 6

又$M'Q'=MQ$, $\therefore MQ+AQ+BQ=M'Q'+QQ'+AQ$.

$\because$ 点A、M'为定点, 所以当Q、Q'两点在线段AM'上时, $MQ+AQ+BQ$最小.

由条件可以证明点Q'总在AM'上, 所以AM'与OM的交点就是所要的G点, 如图7, 可证$OG=\frac{1}{2}MG$.

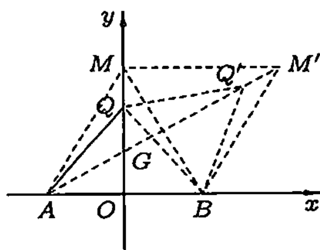


图 7

下面再看一个例子, 让我们更能体会几何建模的优越性.

例 (2009年潍坊市中考题)已知边长为a的正三角形ABC, 两顶点A、B分别在平面直角坐标系的x轴、y轴的正半轴上滑动, 点C在第一象限, 连结OC, 则OC的长的最大值是________.

解析: 如图8, 取AB的中点E, 连结OE和EC. 在Rt$\triangle AOB$中, $OE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$. 在等边$\triangle ABC$中, $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 一般情况下, 总存在$\triangle OEC$,于是$OC\leqslant OE+EC$. 当O、E、C共线时, OC的长就会达到最大值$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)a$.

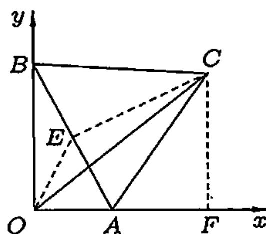


图 8

如果我们不抓住图形中的不变量OE和CE去构造$\triangle OEC$, 将求OC的最大值问题转化为OC与$OE+EC$进行比较的问题, 那么就得通过勾股定理求解.

过点C作$CF\perp x$轴于点F. 设$\angle BAO=\theta$, 则$\angle CAF=120°-\theta$. 则$OF=a[\cos\theta+\cos(120°-\theta)]$, $CF=a\sin(120°-\theta)$. 所以

$$\begin{aligned}&OC\\=&a\sqrt{\sin^2(120°-\theta)+[\cos\theta+\cos(120°-\theta)]^2}\\=&a\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\theta}\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a.\end{aligned}$$

当$\theta=45°$时, 能取到最大值$\frac{1+\sqrt{3}}{2}a$.

显然, 这种解法对初中生来说就勉为其难了, 因为这里所涉及到的三角函数知识要到高中才学, 但如果采用几何方法构造三角形, "化折为直"或"两点之间, 线段最短", 就能让初中生容易理解和接受.

至此, 我们看到采用建立几何模型来解决2009北京市中考压轴题第(3)小题比代数方法要优越得多. 基于前面的分析, 给予我们两点启示:

一是参考答案提供的解题过程是一个"仅供参考"的解题思路, 省去了必要的分析, 即省去了"过点A作$AH\perp BM$于点H, 则AH与y轴

(下转第1-32页)

概念归根　解题归根

200062　华东师范大学数学系　邹一心

数学中有一些概念或法则，如果追根究底，可发现他们间的内在联系，于是，如何使一些"貌异质同"的问题理清支根，叶归"总根"，值得玩味.

一、一些貌异的问题

1. 重温单位圆

问题：三角学中诸多问题，为什么能转化到单位圆内解决？

在初中，如图1所示，由两直角三角形相似，得 $\sin\alpha=\dfrac{AB}{OB}=\dfrac{A'B'}{OB'}$ ··························· ①

即当锐角 α 确定后，① 式恒成立，$\sin\alpha$ 的值与 $|OB|$ 之大小无关，于是取 $|OB|=1$，记作 $\sin\alpha=AB$.

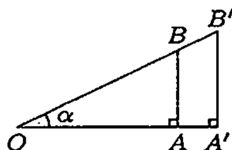


图 1

到了高中，建立直角坐标系，由锐角 α 推广到任意角. 相应的三角比可以定义在任意半径的圆中. 当然在以 O 为圆心，以 $|OB|=1$ 为半径的圆中同样能够体现三角比最简便的形式.

有了单位圆的概念，随之有了三角函数线的概念. 于是，三角函数值的正负、单调性、周期性、极值等等，诸多性质都能在单位圆中体现，于是，只要脑中有个单位圆，心中有三角函数线，解决有关的一些三角问题就非常简单，凸现了数学的简洁美.

2. 重温组合公式

问题：在法则和公式中，计算组合数，为什么可以通过转化为计算排列数而得到？

事实上，为求排列数 $P_n^m(m\leqslant n)$，可先求出组合数 C_n^m，再求出每一个组合数中 m 个元素的全排列数 P_m^m，据乘法原理，$P_n^m=C_n^m\cdot P_m^m$，即得 $C_n^m=\dfrac{P_n^m}{P_m^m}$ ·· ②

上述 ② 式，也可作如下解释：在 P_n^m 个排列中，将 n 个元素相同的 P_m^m 个排列作为一堆，分成 C_n^m 堆，每一堆中元素的有序性被取消了. ② 式中的除法即体现把全体元素分堆. 这样，每一堆中元素被看作是一样的而不加区分的.

排列与组合，有序与无序，共存于可互相转化的统一体中，凸现了数学的和谐美.

3. 重温余数问题

问题：怎样通过余数问题将整数分类？

可以证明，对于任意一个整数 $m>0$，若用 m 去除两个整数 a、b，所得的余数相同，则称 a、b 关于 m 同余，记作 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ \ m)$.

事实上，通过同余就是能把整数进行分类，把 m 除 a,b 后余数相同的放在一类. 例如把被2除余0或者余1的整数分别叫做偶数、奇数，如果用整数 m 去除所有的整数，余数就是0，1，2，$\cdots$，$m-1$，相应的就把整数分成了 m 类. 记作：

$$[0]_m,[1]_m,[2]_m,\cdots,[m-1]_m.$$

这样，任一子集中的元素，都可看作不加区别的. 因此，该子集中的任一元素都有资格作为该子集的代表，当然，我们一般选择形式最方便的元作为代表.

这里，使用了抽象的集合论语言和同余的符号语言替代了带余数除法的文字语言，凸现了数学的语言美.

4. 重温位置向量

问题：向量的有关问题，为什么要转化到位置向量来解决？

事实上，向量平移后得到的是相同的向量，在无数个相同向量中，可以挑选其中使向量的运算最简便的一个，即挑选位置向量作为代表. 由于向量终点的坐标与位置向量一一对应，才有了向量的坐标表示，向量的分解与合成······. 向量的坐标在几何元素中引进了一些代数运算，建

立了几何与代数的通道. 作为数形结合的工具, 向量威力无穷, 凸现了数学的奇异美.

5. 重温分数的扩分与约分问题

问题: 分数作为两个整数比, 如何使它的表达形式唯一.

刘徽注《九章算术·方田》约分术(公元3世纪)指出, "分之为数, 繁则难用, 设有四分之二者, 繁而言之, 亦可为八分之四; 约而言之, 则二分之一也. 虽则异辞, 至于为数, 亦同归尔".

这里, 翻译成现代语言, 即$\left\{\cdots\frac{4}{8},\frac{2}{4},\frac{1}{2},\cdots\right\}$中的元素是不加区别的, 看作一样的, 我们可选既约分数$\frac{1}{2}$作为它们的代表, 《九章算术》的约分术凸现了数学的古典美.

此外, 在周期函数中, 我们只需要在主值范围内讨论清楚它的性质就可以了……

二、貌异的问题有共同的"根"

由上可见, 三角学中相似三角形定义的锐角三角比之间的关系, 不同半径的圆定义的任意角三角比之间的关系, 排列与组合关系, 整数中的同余关系, 向量间的平移关系, 分数的扩分与约分关系等问题中都涉及一种"关系", 这种关系叫做等价关系.

所谓等价关系: 指要满足如下三个条件:自反性、对称性、传递性, 上述几例, 不难验证满足三个条件. 以同余关系为例, 它满足

(1)自反性: $\forall a\in\mathbf{Z}$, 有$a\equiv a\,(\mathrm{mod}\ m)$;

(2)对称性: 若$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, 则$b\equiv a(\mathrm{mod}\ m)$;

(3)传递性: 若$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, $b\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$, 则$a\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$.

从高观点来看, 不同半径的角的三角比之间的关系、排列与组合关系、整数的同余关系、平移向量之间的关系、约分和扩分的分数之间的关系本质都是一种等价关系.

三、解题归根用模块

由上可知, 如果说, 有些概念往往可归根于"关系", 那么, 有些解题, 则往往可归根于"模块".

什么是模块?——据《中国数学双基教学》(张奠宙编, 上教社出版)一书中有如下描述: "这是一种有机的知识体和技能组, 通过变式方法展开, 用数学内部的'联结(connections)'讲数学构成可以随时调用的、立体状的结构而存在, 如图所示". 正是这样, 确保了模块的双基性、应用性及思维性.

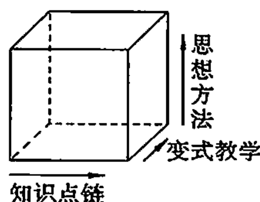
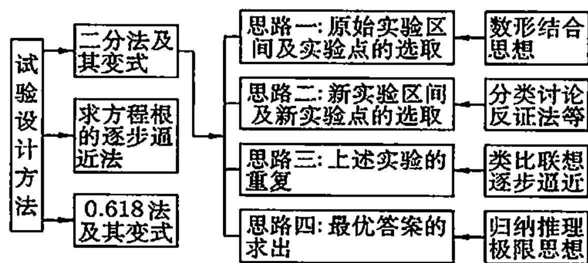


图 2

在《数学习题教学研究》(陈永明名师工作室著, 上教社出版)一书中也有重要描述.

现以2011年上海高考题——"二分法"为例, 从这个试题中将可看到: 其思想方法归根于二分法, 与其质同貌异的问题为0.618法、方程近似根的逐步逼近法等等, 可谓根深叶茂.

例 (2011年上海高考理科第14题)已知点$O(0,0)$、$Q_0(0,1)$和$R_0(3,1)$, 记Q_0R_0的中点为P_1. 取Q_0P_1和P_1R_0中的一条, 记其端点为Q_1、R_1, 使之满足$(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)<0$; 记Q_1R_1的中点为P_2, 取Q_1P_2和P_2R_1中的一条, 记其端点为Q_2、R_2, 使之满足$(|OQ_2|-2)(|OR_2|-2)<0$. 依次下去, 得到P_1, P_2, $\cdots$, P_n, $\cdots$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=$______.



解析: 第一步: 选特殊点——分界点及中点(见图3).

1. 先找分界点P: 按题意, 在Q_0R_0上找一点P, 使$|OP|=2$.

2. 再找Q_0R_0的中点P_1. 经计算, 点P必位于$P_1\left(\frac{3}{2},1\right)$之右侧.

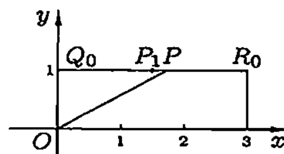


图 3

第二步: 缩小区间找中点(见图4).

1. 按题意, 找出之点Q_1、R_1必在点P的异

侧. 如若不然, 假设点Q_1、R_1均在点P左侧, 则有$|OQ_1|-2<0$, $|OR_1|-2<0$, 于是有$(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)>0$, 与题设矛盾. 同样, 假设点Q_1、R_1均在点P右侧, 则有$|OQ_1|-2>0$, $|OR_1|-2>0$, 于是有$(|OQ_1|-2)(|OR_1|-2)>0$, 与题设矛盾.

因此点Q_1、R_1即为线段P_1R_0的端点. 再找线段Q_1R_1的中点P_2.

2. 取Q_1P_2和P_2R_1中的一条, 记端点为Q_2、R_2, 根据已知条件, 点Q_2、R_2必在点P的异侧. 找线段Q_2R_2的中点P_3.

3. 以此类推, 可得点$P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$

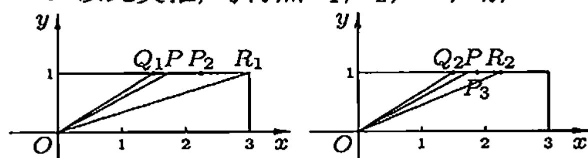


图 4

第三步: 归纳推理, 因为$|Q_nR_n|=\dfrac{3}{2^n}$, 而$\lim\limits_{n\to\infty}|Q_nP_n|=0$, 点$P$在线段$Q_nR_n$上, 所以中点$P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$的极限位置为点$P$. 于是在$\mathrm{Rt}\triangle Q_0PO$中, $Q_0P=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$, 故$\lim\limits_{n\to\infty}|Q_0P_n|=\sqrt{3}$.

四、点滴思考

1. 归根的起步需要类比联想

类比——将各貌异问题进行类比, 联想——将各质似问题通过联想, 整体解决. 显然, 如果将各问题孤零零地割裂解决, 无疑少慢差费, 只有掌握了概念之间的相关性, 所学知识才会较扎实. 因为变式训练包含在模块中, 因此所学知识才能巩固, 不易遗忘. 我们不怕遗忘, 但精华难忘.

2. 归根的关键需要数学抽象

由于有了数学抽象, 才能使得貌异质似的问题能用统一的观点、统一的方法、去统一地解决. 如果没有数学抽象, 没有数学的形式化, 就没有数学的发展. 抽象思维是直觉思维的升华, 中学数学教学需重视适当的抽象度.

3. 归根的保证需要进修提高

虽然现在不是把中学数学都换成现代数学, 但现代数学的思想、方法要渗透; 只有从高观点下看有关概念, 才能登高一览群山小, 才能清澈见底. 为此, 教师只有有了1桶水, 才会有1杯水去滋润全部学生.

水自何来? 历来有效学习是吸水的重要渠道之一. 数学大师陈省身先生于八十年代曾受邀到华东师大数学系作学术报告. 他说: "要读书, 尤其理科, 要读现代的书, 名人的书". 此言深刻.

参考文献

[1] H. B. Griffith等. Classical Mathematics, 经典数学综合教材上、下册, 贵州人民出版社, 1986.

[2] 张奠宙, 赵小平. 教学中多多关注"后半段"——怎样上好复习课?[J]. 数学教学, 2011(4): 封底.

(上接第1-29页)

的交点为所求的G点"的理由, 也就是省去了"知其然要知其所以然"的过程, 作者认为这种解答缺乏理论上的支撑也在情理之中, 但就认为"得出的结论也有相当的偶然性和较多的投机成分, 作为中考压轴题这显然有失公允"值得商榷. 相反, 这道题较好地考查了学生观察图形、分析条件、探究问题的能力. "化折为直"或"三点共线", "垂线段最短"或"两点之间, 线段最短"等等在求最值方面经常用到, 是一种重要的解题思路;

二是文[1]着重从代数上进行严格分析, 该解法对学生要求肯定很高, 这就造成"在淡化了一元二次方程根的判别式要求的现行教材背景下, 这个问题的出现对学生而言就显得勉为其难了." 但是, 如果我们从代数角度来解答问题感到非常困难时, 那么应该多从几何角度来思考, 这样往往可以获得简便的解法.

参考文献

[1] 王润中. 对一道中考压轴题"遗留"问题的探讨[J]. 中小学数学, 2010(1-2): 65-66.

[2] 王宇刚. 答案真的有问题吗[J]. 中小学数学, 2010(9): 6-8.

[3] 金建华. 费马点与中考试题[J]. 初中数学教与学, 2010(9): 31-33.

从学生解答过程看高考试卷的效度

200023 上海市卢湾高级中学 阮瑾怡

2011年高考已经落下了帷幕，今年的上海数学理科试卷在难度适当的基调下，稳步走创新之路，充分体现了上海特色. 特别是第23题，可以满足不同学习层次的学生的需求. 为了进一步研究选择题、填空题、解答题等各题型的功能，充分理解它们在试卷中的作用和地位，在考试结束后，笔者对十位理科考生的数学试卷答题情况进行了访谈，他们的成绩介于100－142之间，具体分布如下:

高考数学分所在区间	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,142)
人数	2	3	3	2

高考成绩处于这样分数段的学生，可以认为他们具备了较好的基本数学素养.

试图通过访谈交流，了解他们在考试时做对或做错的原因，并借此思考2011年的上海高考数学理科试卷对于检测学生数学能力的效度.

笔者主要就两道填空题(第9题、第13题)，一道选择题(第17题)，一道解答题(第22题)与学生进行了交流，并得到如下信息.

一、思维水平层次不同的学生都可以做对的试题

第9题　马老师从课本上抄录一个随机变量ξ的概率分布律如下表:

x	1	2	3
$P(\xi=x)$	?	!	?

请小牛同学计算ξ的数学期望. 尽管“!”处完全无法看清，且两个“?”处字迹模糊，但能断定这两个“?”处的数值相同. 据此，小牛给出了正确答案$E\xi=$________.

这道题主要考查学生对于求解$E\xi$的知识、随机变量ξ的概率之间的关系的掌握情况，10名考生该题全部答对. 通过与学生的交流，了解到学生都可以想到 ?+!+?=1，即掌握了随机变量ξ的概率和为1，只是在具体求解的时候有以下不同的处理方法:

1. 代具体数据，如取？$=!=\dfrac{1}{3}$，随后求出$E\xi$的值;

2. 令$x=?$, $y=!$，于是$2x+y=1$, $E\xi=x+2y+3x=2(2x+y)$，根据$2x+y=1$求出$E\xi$的值.

显然在没有计算错误的时候，两种做法都可以得到正确的结论，但是在掌握概念上却有差异，前一种利用的是碰巧做对的特殊值法，后一种利用了数学期望的基本概念. 从得分情况来看，分数在100－110之间的学生基本使用的是前一种方法，而分数在120－142的学生基本都选择了相对严谨的后一种方法. 从这道题的解法选择可以看出相对高分段学生数学思想方法掌握情况较好. 虽然就本题的题型而言似乎并不能够对这两种具有不同思维水平层次的学生进行区分.

二、不知所以然也可以做对的试题

第13题　设$g(x)$是定义在$\mathbf{R}$上，以1为周期的函数，若函数$f(x)=x+g(x)$在区间$[3,4]$上的值域为$[-2,5]$，则$f(x)$在区间$[-10,10]$上的值域为________.

笔者认为这道题主要考查学生对于周期函数的理解，与学生交流后得到各分数段学生答题情况如下:

高考数学分所在区间	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,142)
答错(不知道怎么做)	2	1		
答对(思考过程不正确)		2	2	1
答对(思考过程正确)			1	1

不难看出，学生可以得到正确答案，但是半数是猜对的. 通过与学生的交流，学生主要存在这样几种答题情况:

1. 不知道周期在这里怎么用，因此没有做出来;

2. 设$g(x)$为某一个具体的函数，比如二次

函数, 然后将端点带进去, 得到答案, 答案恰好正确;

3. 假设 $g(x)$ 为单调递增的函数, 然后将端点带进去, 得到答案, 答案恰好正确;

4. 因为 $x\in[3,4]$ 时, $f(x)=x+g(x)\in[-2,5]$, 所以 $g(x)\in[-5,1]$, 则 $x\in[-10,10]$ 时, 当 $x=-10$ 时, $f(x)$ 有最小值 -15; 当 $x=10$ 时, $f(x)$ 有最大值11, 从而得到 $f(x)\in[-15,11]$ 这一正确答案.

显然上述2、3、4几种做法都可以得到正确答案, 但是其思维过程都有缺陷或错误, 学生有这样一种感觉有些试题自己并不明白, 但是还是能够蒙对. 通过这样的反馈, 可以从一个侧面反映出本题在考查学生能力时存在一定的缺陷.

三、无从下手凭"感觉"做对的题目

第17题 设 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5 是空间中给定的5个不同的点, 则使 $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\overrightarrow{MA_3}+\overrightarrow{MA_4}+\overrightarrow{MA_5}=0$ 成立的点 M 的个数为····(　)

(A) 0;　(B) 1;　(C) 5;　(D) 10.

高考数学分所在区间	[100,110)	[110,120)	[120,130)	[130,142)
答错(不知道怎么做)		1		
审题错并答错("空间中"看成"平面上")	1	1	1	
审题错但答对("空间中"看成"平面上")			1	
猜对	1	1	1	2

这道题的解答情况如上表所示, 有3名学生将"空间中"看成"平面上", 在这样的情况下, 仍有一名学生答对. 通过与学生交流得知, 学生普遍感觉这道题无从下手, 于是大部分学生开始"猜", 他们所谓的"猜"分为三类:

1. 排除法, 认为选项5、10太大, 0凭感觉不太可能, 因此"猜"是1个;

2. 归纳法, 将5个点退为2个点, 很显然答案是1个, 再将5个点退为3个点, 也可以得到答案是1个, 因此归纳结论为一个;

3. 没有任何依据地猜.

虽然"猜"不是解决这道试题的方法, 但在几种"猜"的策略中, 用归纳法是比较合适的方法, 不过在访谈过程中, 只有2位学生的做法可以称为归纳法. 这反映出在教学过程中教师没有强调归纳法是一种很有效的数学方法, 或者说在归纳法的教学过程中, 学生的体验与感悟不是很到位, 这是我们在今后的教学过程中应该注意的问题.

四、难以写清解答过程的解答题

第22题 已知数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=3n+6$, $b_n=2n+7\,(n\in\mathbf{N}^*)$. 将集合 $\{x|x=a_n,n\in\mathbf{N}^*\}\cup\{x|x=b_n,n\in\mathbf{N}^*\}$ 中的元素从小到大依次排列, 构成数列 $c_1,c_2,c_3,\cdots,c_n,\cdots$

(1) 写出 c_1,c_2,c_3,c_4;

(2) 求证: 在数列 $\{c_n\}$ 中, 但不在数列 $\{b_n\}$ 中的项恰为 $a_2,a_4,\cdots,a_{2n},\cdots$,

(3) 求数列 $\{c_n\}$ 的通项公式.

笔者着重对学生第(3)小题的解答情况进行了了解, 学生普遍反映不知道如何书写解答过程, 特别是几个数学程度较好的学生, 习惯了严谨的数学思维, 他们试图严格地推导出数列 $\{c_n\}$ 的通项公式, 也有学生尝试利用数学归纳法来解决问题. 学生主要的困难是不善于表达, 总感觉无法写清楚解题过程.

这道题的解题关键在于利用第(2)小题的结论, 因为数列 $\{c_n\}$ 中的项完全由数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 的项构成, 同时 a_{2n-1} 是数列 $\{b_n\}$ 中的项. 这样, 除去这类公共项之外, 数列 $\{c_n\}$ 中的其它项就由 a_{2n}、b_{3n-1}、b_{3n} 构成. 因此分别写出 a_{2n-1}、a_{2n}、b_{3n-1}、b_{3n} 即可.

数学语言的运用与表达是数学教学的主要内容之一, 在今后的教学中, 我们应加强培养学生这方面的能力.

五、颇具亮点的题目

第23题 已知平面上的线段 l 及点 P, 任取 l 上一点 Q, 线段 PQ 长度的最小值称为点 P 到线段 l 的距离, 记作 $d(P,l)$.

(1) 求点 $P(1,1)$ 到线段 $l:x-y-3=0\,(3\leqslant x\leqslant 5)$ 的距离 $d(P,l)$;

(2) 设 l 是长为2的线段, 求点的集合 $D=\{P|d(P,l)\leqslant 1\}$ 所表示的图形面积;

(3) 写出到两条线段 l_1、l_2 距离相等的点的集合 $\Omega=\{P|d(P,l_1)=d(P,l_2)\}$, 其中 $l_1=AB$, $l_2=CD$, A、B、C、D 是下列三组点中的一

(下转第1-5页)

一道貌似平凡实则令人叫绝的试题

435241 湖北省阳新县白沙中学 董才强

每年全国各地的省级重点中学或省级示范高中自主招生考试都会出现一些思维量大、综合性很强的试题, 本文举出一例与大家分享.

题目 (湖北省示范高中——黄石二中理科实验班自主招生试题) 如图1, $\odot O$是等边$\triangle ABC$的内切圆, 与AB、AC两边分别切于D、E两点, 连结DE. 点P是劣弧DE上的一个动点(不与D、E重合), 过点P作$PM\perp AB$, $PN\perp AC$, $PK\perp BC$, 垂足分别为M、N、K, PK交DE于L点. 求证: (1) $PL^2=PM\cdot PN$; (2) $\sqrt{PK}=\sqrt{PM}+\sqrt{PN}$.

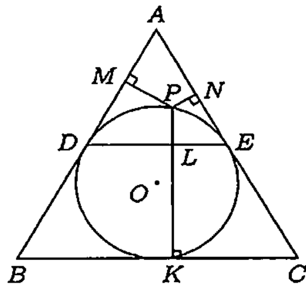


图1

本题条件简明, 结论优美, 笔者一看到此题(以下简称"原试题")就被深深吸引住了. 现就该题的解法及结论的拓展作个简单的介绍. 为了证题过程的简洁, 先介绍两个很有用的引理.

引理1 如图2, 点P是等边$\triangle ABC$内部的一个动点, 过点P作$PM\perp AB$, $PN\perp AC$, $PK\perp BC$, 垂足分别为M、N、K, 则$PM+PN+PK$是一个定值, 该定值等于等边$\triangle ABC$任意一边上的高.

证明: 显然, 等边$\triangle ABC$三边上的高都相等, 不妨用h来表示.

连结PA、PB、PC, 在等边$\triangle ABC$中, 因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ACP}$,

所以$\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB\cdot PM+\frac{1}{2}BC\cdot PK+\frac{1}{2}AC\cdot PN$, 而$AB=BC=AC$, 所以$\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}AB(PM+PN+PK)$, 于是$PM+PN+PK=h$, 即$PM+PN+PK$等于等边$\triangle ABC$任意一边上的高, 因此是一个定值.

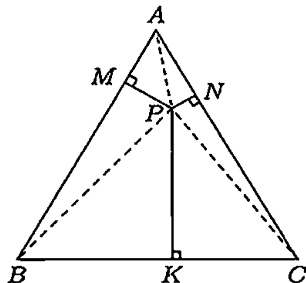


图2

引理2 $\odot O$是等边$\triangle ABC$的内切圆, 与AB、AC两边分别切于D、E两点, 连结DE, 则DE是等边$\triangle ABC$的中位线.

这个引理的证明很简单, 这里就不赘述.

1. 试题解法

现在利用引理1、2来证明这道自主招生试题. 有了这两个引理的支撑, 证明过程就简洁了.

分析: 第(1)小题可先把要证的等积式化为比例式, 然后借助相似三角形解决; 第(2)小题所证的等式中每一项都是二次根式, 于是想到去掉根号, 为此先把等式两边同时平方, 再寻求线段之间的数量关系.

证明: (1)如图3, 连结PD、PE.

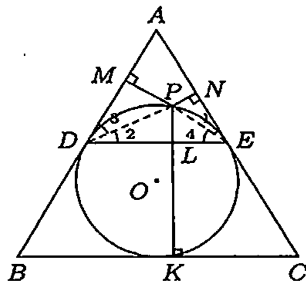


图3

由引理2可知DE是等边$\triangle ABC$的中位线，

所以$DE/\!/BC$.

又因为$PK\perp BC$，所以$PK\perp DE$于点L，

则可得$\angle PNE=\angle PLD=90°$.

因为$\odot O$是等边$\triangle ABC$的内切圆，

所以$\angle 1$是$\odot O$的弦切角，则$\angle 1=\angle 2$，所以$\mathrm{Rt}\triangle PNE\backsim\mathrm{Rt}\triangle PLD$，

则可得$\dfrac{PN}{PL}=\dfrac{PE}{PD}$. ……………… ①

同理可知$\mathrm{Rt}\triangle PLE\backsim\mathrm{Rt}\triangle PMD$，

所以$\dfrac{PE}{PD}=\dfrac{PL}{PM}$. ……………… ②

由①、②得到$\dfrac{PN}{PL}=\dfrac{PL}{PM}$，

即$PL^2=PM\cdot PN$.

(2)因为$PM\perp AB$，$PN\perp AC$，$PK\perp BC$，由引理1可知$PM+PN+PK$等于等边$\triangle ABC$中BC边上的高，由引理2可知DE是等边$\triangle ABC$的中位线，$DE/\!/BC$，所以等边$\triangle ABC$中BC边上的高等于两平行线DE、BC之间距离LK的2倍，于是$PM+PN+PK=2LK$，则$PM+PN=2LK-PK$.

由(1)的结论可知$PL=\sqrt{PM\cdot PN}$，

所以$(\sqrt{PM}+\sqrt{PN})^2$

$=PM+PN+2\sqrt{PM\cdot PN}$

$=PM+PN+2PL=2LK-PK+2PL$

$=2(LK+PL)-PK=PK$，

所以$\sqrt{PK}=\sqrt{PM}+\sqrt{PN}$.

2. 试题简评

2.1 从试题设计形式来看

记得著名的数学家波利亚曾这样写道："去设计并解出一个合适的辅助问题，从而用它求得一条通向一个表面上看来很难接近的问题的通道，这是最富有特色的一种智力活动."原试题第(1)小题就能起到这种通道的作用，如果直接要求证明第(2)小题，恐怕学生很难完成，甚至会出现无人问津、万马齐喑的局面. 试题通过第(1)小题的设置，为第(2)小题的解答做足了有效的铺垫，学生就能沿着命题者铺设的解题"台阶"拾级而上，循序渐进地完成试题的证明. 这种科学、合理的设问迎合了初中学生的能力和水平，让更多学生能够体验解题的经历和喜悦，也体现了命题者的良苦用心.

2.2 从试题解答过程来看

这道自主招生试题重点考查了三个方面的知识：① 圆的弦切角定理(弦切角等于它所夹的弧对的圆周角)；② 相似三角形的判定与性质；③ 等边三角形的一个特殊性质(形内一点到三边的距离之和等于任意一边上的高)，学生只要理解和掌握了这些知识，再对式子进行简单的变形配以合理的运算就可以证得结论. 第(1)小题的证明需将等积式化为比例式，这种互化是证题通法，学生容易想到. 这一小题的难点就在相似三角形的寻找和证明，这既需要思维的直觉探索性和发现性，又需要思维的严密性. 显然，在证明三角形相似的过程中弦切角定理发挥了不可替代的重要作用. 在证明第(2)小题时要能想到平方法去掉根号，这也是解题的通法，渗透着等价转化、数形结合等数学思想方法. 如果考生能够想到这些，剩下的事情可以说是"水到渠成，瓜熟蒂落". 当然，对原试题还可以采取"跳步作答"的解题策略，即如果第(1)小题的证明受阻，就越过第(1)小题直接应用其结论去证明第(2)小题，这样也能"挣"得一定的分数.

2.3 从试题功能、价值来看

哲学家罗素说过："数学，如果正确地看，不但拥有真理，而且也具有至高的美——一种冷峻而严肃的美，正像雕塑所具有的美一样." 细细琢磨原试题，美感油然而生：精美的图形、优美的结论、巧妙的构思、朴实的解法、完美的演绎，向我们展示了数学的美学价值. 相信聪明的学生在解答此题时，既锻炼了数学思维能力，亦感受到了数学美的熏陶，岂不妙哉！

一道好的试题犹如一壶好酒，越品越香醇. 细细品味，这是一道貌似平凡实则令人叫绝的试题，所需要的数学素养非同一般，能够很好地甄别学生的数学思维能力，发挥了省级重点示范高中自主招生试题应有的选拔功能，考查知识能准确到位，考查思维能力可评判高低. 有人望而生畏，不敢动笔；有人迎难而上，从容应对……

3. 试题拓展

越是美好的事物，越能激起人们的联想. 原试题如此优美的结论，当然给我们很多遐想. 如果把原试题题设中的"点P是劣弧DE上的一个动点"改为"点P是优弧DE上的一个动点"，其他条件不变，又会有怎样的结论呢？通过对图形的观察，猜测第(1)小题的结论仍然成立，第(2)

小题的结论需要稍作改动, 于是得到:

问题 如图4, $\odot O$是等边$\triangle ABC$的内切圆, 与AB、AC两边分别切于D、E两点, 连结DE. 点P是优弧DE上的一个动点(不与D、E重合), 过点P作$PM\perp AB$, $PN\perp AC$, $PK\perp BC$, 垂足分别为M、N、K, PK交DE于L点.

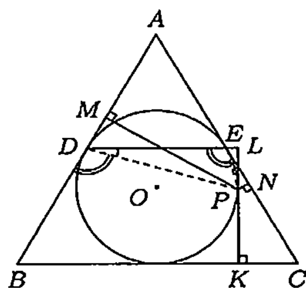


图4

求证: (1) $PL^2=PM\cdot PN$;

(2) $\sqrt{PK}=|\sqrt{PM}-\sqrt{PN}|$.

分析: 之所以在结论(2)等式的右边加上绝对值, 是考虑到$\sqrt{PM}$与$\sqrt{PN}$的大小关系不确定而修正的. 同证明原试题的思路类似, 第(1)小题可先把要证的等积式化为比例式, 然后寻找相似三角形构造比例线段解决; 第(2)小题先把等式两边同时平方, 目的是去掉根号, 再寻求线段之间的数量关系.

证明: (1) 如图4, 连结PD、PE. 由引理2可知DE是等边$\triangle ABC$的中位线, 所以$DE/\!/BC$, 因为$PK\perp BC$, 所以$PK\perp DE$于点L, 则可得$\angle PNE=\angle PLD=90^\circ$. 因为$\odot O$是等边$\triangle ABC$的内切圆, 所以$\angle PEN$是$\odot O$的弦切角, 所以$\angle PEN=\angle PDL$, 所以$\mathrm{Rt}\triangle PNE\backsim\mathrm{Rt}\triangle PLD$, 则可得$\dfrac{PN}{PL}=\dfrac{PE}{PD}$. ………………… ①

同样$\angle BDP$也是$\odot O$的弦切角, 所以$\angle BDP=\angle PED$, 于是可以得到$\angle PDM=\angle PEL$ (等角的补角相等), 所以$\mathrm{Rt}\triangle PLE\backsim\mathrm{Rt}\triangle PMD$, 则$\dfrac{PL}{PM}=\dfrac{PE}{PD}$. ………………… ②

由①、②得到$\dfrac{PN}{PL}=\dfrac{PL}{PM}$, 即$PL^2=PM\cdot PN$.

当垂足L落在线段DE上时同样可以证明结论(1)成立.

(2) 因为$PM\perp AB$, $PN\perp AC$, $PK\perp BC$, 由引理1可知$PM+PN+PK$等于等边$\triangle ABC$中BC边上的高, 由引理2可知DE是$\triangle ABC$的中位线, $DE/\!/BC$.

因为$PK\perp BC$, 所以$PK\perp DE$于点L, 所以等边$\triangle ABC$中BC边上的高等于两平行线DE、BC之间距离LK的2倍,

于是$PM+PN+PK=2LK$,

则$PM+PN=2LK-PK$.

由(1)已经得出$PL^2=PM\cdot PN$,

所以$PL=\sqrt{PM\cdot PN}$,

所以 $(\sqrt{PM}-\sqrt{PN})^2$

$=PM+PN-2\sqrt{PM\cdot PN}$

$=PM+PN-2PL=2LK-PK-2PL$

$=2(LK-PL)-PK=PK$,

所以$\sqrt{PK}=|\sqrt{PM}-\sqrt{PN}|$.

(上接第1-1页)

求所有正方形的面积的和.

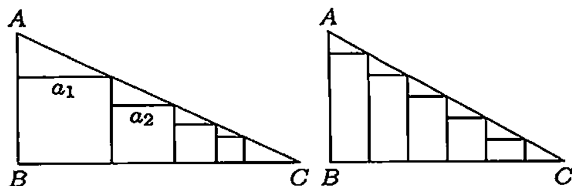


图1 图2

解决这个问题后, 将这个问题进行变式.

例5 如图2, 将$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的BC边n等分, 过每一个等分点作垂线, 再作如图所示的一系列长方形. 求这些长方形的面积和S_n, 并求$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, 这个极限值与$\mathrm{Rt}\triangle ABC$面积有什么关系?

思考: 通过例5, 让学生再一次体会用极限解决问题, 也对前面用极限推导无穷等比数列各项的和显得突然的一种弥补.

通过上述三个环节的探究, 学生不但能主动地实现本节课的主要教学目标, 理解无穷等比数列求和的意义, 掌握其方法和应用, 同时还对无限循环小数的意义、有限运算与无限运算的区别、极限等概念达到更深刻的理解, 更深入的融会贯通.

2011年上海高考理科压轴题推广

510631 华南师范大学数学科学学院 黄靖舒

2011年全国高考理科上海卷压轴题很有趣, 题目如下: 已知平面上的线段l及点P, 在l上任取一点Q, 线段PQ长度的最小值称为点P到线段l的距离, 记作$d(P,l)$. 设l是长为2的线段, 求点集$D=\{P|d(P,l)\leqslant 1\}$所表示图形的面积(第1小题与第3小题略).

该题只用一个简单的新定义, 便构建起新的问题情境, 似曾相识却又大不相同, 考查了学生将已有知识迁移到新问题的能力.

沿用该题的定义, 若将题中的"线段"改为"圆弧s", 则$D=\{P|d(P,s)\leqslant r\}$(下记为$D_s$)表示的图形形状如何? 面积是多少? 若将"线段"改成一个"封闭图形", 又如何呢? 带着思考, 笔者对该题第2小题的结论进行了推广研究. 为行文方便, 定义点P到图形Ω的距离为: 在Ω上任取一点Q, 线段PQ长度的最小值, 记作$d(P,\Omega)$; 并记点P到线段l所在直线的距离为$d_P(l)$, 点P到点Q的距离为d_{PQ}.

1. 由直线段到圆弧

对于线段AB, 由过端点且垂直于AB的两条平行线将平面划分为三个区域, 三个区域中的点到AB的距离依次为d_{PA}, $d_P(AB)$, d_{PB}. 那么对于圆弧是否有类似的性质呢? 先考察平面上劣弧的情况. 为方便, 记劣弧s的圆心为O, 半径为r, 劣弧的两个端点分别为A、B. 经尝试发现, 平面亦可被射线OA、OB、劣弧s以及射线OE(点E在$\angle AOB$的外部, 且$\angle AOE=\angle BOE$)划分为四个区域, 如图1所示.

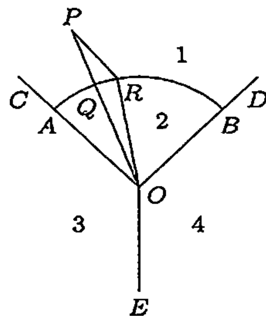


图 1

若点P落在区域1(包含射线AC和BC)中, 易知$d(P,s)=d_{PO}-r$. 因为连结PO, 必与s交于一点Q, 取弧s上异于点Q的任意点R, 由三角形性质可知, $PQ+QO<PR+RO$, 于是$PQ<PR$, 故结论成立. 类似可证明, 若点P落在区域2, 有$d(P,s)=r-d_{PO}$.

若点P在区域3(包含射线OE), 类比直线段的情况, 猜想$d(P,s)=d_{PA}$. 如图2所示, 取弧上任意点Q, 连结PQ, 设$\angle POQ=\alpha$, $\angle AOB=2\theta\,(0<\theta<\pi)$, 由余弦定理知$PQ^2=PO^2+OQ^2-2PO\cdot OQ\cos\alpha$, PO与OQ均为定值, 故要使PQ^2最小, 只需研究$\cos\alpha$在何时取最大值. 设$\angle POA=\alpha_0\,(0<\alpha_0\leqslant\angle AOE)$, 则$\alpha_0<\alpha\leqslant\pi+\theta$. 由余弦函数的性质知, $\cos\alpha$在$[0,\pi]$上单调递减, 在$[\pi,2\pi]$上单调递增. 故取射线OB的反向延长线OF, 其将区域3分为两部分.

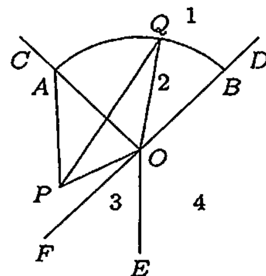


图 2

(1) 当点P落在$\angle FOA$的内部(包含射线OF)时, 易知$0<\alpha_0<\alpha\leqslant\pi$. 故当$\alpha=\alpha_0$时, $\cos\alpha$取最大值.

(2) 当点P落在$\angle FOE$的内部时, 易知$0<\alpha_0<\alpha\leqslant\pi\leqslant 2\theta+\alpha_0$. 由余弦函数性质可知$\cos\alpha$的最大值为$\cos\alpha_0$或$\cos(2\theta+\alpha_0)$. 由于$\cos\alpha$的图像关于直线$x=\pi$对称, 而$(2\theta+\alpha_0-\pi)-(\pi-\alpha_0)=2\alpha_0+2\theta-2\pi\leqslant 0$, 即$2\theta+$

α_0到$x=\pi$的距离小于α_0到该直线的距离, 故$\cos\alpha_0>\cos(2\theta+\alpha_0)$, 即$\cos\alpha$在$\alpha=\alpha_0$处取最大值.

综上, 当$\alpha=\alpha_0$时, $\cos\alpha$取最大值, PQ^2取得最小值, 亦即PQ取得最小值, 因此猜想成立, $d(P,s)=d_{PA}$.

由图形的对称性知, 若点P在区域4, 则有$d(P,s)=d_{PB}$.

故$D_s=\{P|d(P,s)\leqslant r\}$所表示的图形是如图3所示, 以点$O$为圆心、$2r$为半径、圆心角为$2\theta$的劣弧以及分别以$B$和$A$为圆心、$r$为半径的两个半圆周组成的封闭图形, 其面积为$(4\theta+\pi)r^2$. 实际上, 当$s$为半圆周或优弧时, D_s所表示的图形与图3类似, 面积分别为$3\pi r^2$和$(2\theta+2\pi-\sin 2\theta)r^2$, 具体证明由读者自行完成.

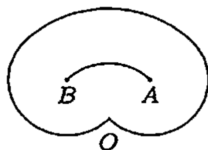


图 3

2. 由圆弧到封闭图形

在平面上, 最简单的封闭四边图形莫过于矩形. 记矩形$ABCD$ (包括矩形内部的所有点)为S, 其长为a, 宽为b, P是矩形外任意一点. 先考察线段AD一侧的情况, 如图4, 过点A作射线$AE\perp AD$, $AF\perp AB$, 过点D作$DG\perp AD$, $DH\perp DC$, 四条射线将矩形外部分为四个区域.

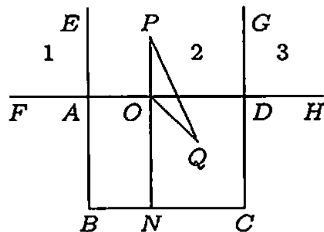


图 4

若点P落在区域2(包含射线AE和DG)中, 如图4所示, 过点P作$PO\perp AD$于点O, 并延长PO交BC于N, 易知, 线段ON上任一点到P的距离均大于或等于d_{PO}. 取矩形$ABCD$中ON外任一点Q, 由于$ABCD$是凸的, 因此, $\angle POQ=\angle POD+\angle DOQ\geqslant 90^\circ$, 故知$PQ>PO$, 即在区域2中, $d(P,S)=d_P(AD)$.

若点P落在区域1(不包含射线AF)中, 连结PA, 并延长交BC(或CD)于点M. 易知线段AM上任一点到P的距离均大于或等于d_{PA}. 此时, 矩形被AM分为两部分. 若取$\triangle ABM$中异于AM的一点Q, 易知$\angle PAQ=\angle PAF+\angle FAB+\angle BAQ\geqslant 90^\circ$, 所以$PQ>PA$, 同理, 若点$Q$在四边形$AMCD$内也有类似的结论. 故知, 在区域1中, $d(P,S)=d_{PA}$.

由于对称性, 矩形$ABCD$其他边长亦有相同的结论. 故$D_s=\{P|d(P,S)\leqslant r\}$所表示的图形如图6所示, 是长为$a+r$, 宽为$b+r$的矩形, 其中四个直角分别换成以$A$、$B$、$C$、$D$为圆心, 半径为$r$的四分之一圆, 其面积为$ab+2ar+2br+\pi r^2$.

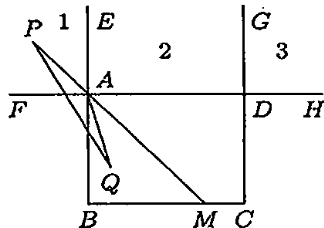


图 5

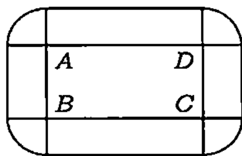


图 6

3. 小结与展望

本文将原题中的"直线段"推广到"圆弧" 以及 "平面", 得出与原题类似的结论. 那么, 若"线段"换成"一般的弧线"呢? 题目中考察的是平面内的情况, 如果图形在空间中呢? 这些有趣的情况留给读者继续探究、解密吧!

2011年四川高考解析几何题的探究

511400 广东省广州市番禺中学 杨 华

2011年高考已降下帷幕, 但对精彩考题的研究和认识却在继续, 笔者对2011年高考四川卷理科第21题情有独钟.

题目 椭圆有两顶点$A(-1,0)$、$B(1,0)$, 过其焦点$F(0,1)$的直线l与椭圆交于C、D两点, 并与x轴交于点P, 直线AC与直线BD交于点Q, 如图1.

(1) 当$|CD|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$时, 求直线l的方程;

(2) 当点P异于A、B两点时, 求证: $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$为定值.

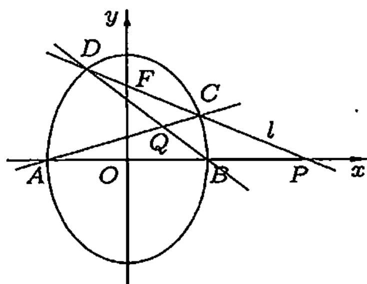


图 1

这是一道颇具美感、耐人寻味的好题目. 当笔者看见此题第(2)小题时的第一反应是: 此题是一种特殊情形下的结论, 应该有很大推广空间.

结论1 设椭圆方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, 顶点$A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过焦点$F(0,c)$的直线$l$与椭圆交于$C$、$D$两点, 并与$x$轴交于点$P$, 直线$AC$与直线$BD$交于点$Q$, 如图2. 当点$P$异于$A$、$B$两点时, 则$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$为定值.

证明: 若直线l垂直于x轴, 不符合题意;

若直线l不垂直于x轴, 设直线l的斜率为k, 则方程为$y=kx+c$ $\left(k\neq 0\text{且}k\neq\pm\frac{c}{b}\right)$, 所以点$P$的坐标为$\left(-\frac{c}{k},0\right)$.

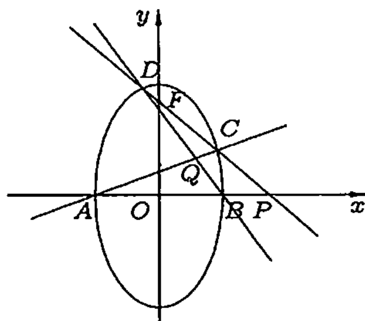


图 2

联立直线和椭圆的方程, 则$\begin{cases}y=kx+c,\\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1,\end{cases}$

化简得$(a^2+b^2k^2)x^2+2b^2ckx-b^4=0$.

设$C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$、$Q(x_0,y_0)$,

有$\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{2b^2ck}{a^2+b^2k^2},\\ x_1\cdot x_2=-\frac{b^4}{a^2+b^2k^2},\end{cases}$

由A、Q、C三点共线, 有$\frac{y_0}{x_0+b}=\frac{y_1}{x_1+b}$;

由B、Q、D三点共线, 有$\frac{y_0}{x_0-b}=\frac{y_2}{x_2-b}$,

消去y_0, 得$\frac{x_0+b}{x_0-b}=\frac{x_1+b}{x_2-b}\cdot\frac{y_2}{y_1}$, 因为$-b<x_1$、$x_2<b$, $\frac{x_1+b}{x_2-b}<0$, 所以$\frac{x_0+b}{x_0-b}$与$\frac{y_2}{y_1}$异号, 因为

$$\left(\frac{x_0+b}{x_0-b}\right)^2=\left(\frac{x_1+b}{x_2-b}\right)^2\cdot\frac{y_2^2}{y_1^2}$$

$$=\left(\frac{x_1+b}{x_2-b}\right)^2\cdot\frac{b^2-x_2^2}{b^2-x_1^2}=\frac{(b+x_1)(b+x_2)}{(b-x_1)(b-x_2)}$$

$$=\frac{b^2+(x_1+x_2)b+x_1x_2}{b^2-(x_1+x_2)b+x_1x_2}$$

$$=\frac{b^2-\frac{2b^3ck}{a^2+b^2k^2}-\frac{b^4}{a^2+b^2k^2}}{b^2+\frac{2b^3ck}{a^2+b^2k^2}-\frac{b^4}{a^2+b^2k^2}}$$

$$=\left(\frac{kb-c}{kb+c}\right)^2.$$

又 $y_1y_2=k^2x_1x_2+kc(x_1+x_2)+c^2=\dfrac{a^2(c-kb)(c+kb)}{a^2+b^2k^2}$, 则 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 与 $\dfrac{kb-c}{kb+c}$ 异号,

所以 $\dfrac{x_0+b}{x_0-b}$ 与 $\dfrac{kb-c}{kb+c}$ 同号,

故 $\dfrac{x_0+b}{x_0-b}=\dfrac{kb-c}{kb+c}$, 解得 $x_0=-\dfrac{kb^2}{c}$.

因此 $Q\left(-\dfrac{kb^2}{c},y_0\right)$,

则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\dfrac{c}{k},0\right)\cdot\left(-\dfrac{kb^2}{c},y_0\right)=b^2$ 为定值.

将结论1中的"直线 AC 与直线 BD 交于点 Q"改为"直线 AD 与直线 BC 交于点 Q", 结论 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 仍然成立.

推论1 设椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 顶点 $A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过其焦点 $F(0,c)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AD 与直线 BC 交于点 Q, 如图3. 当点 P 异于 A、B 两点时, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 为定值.

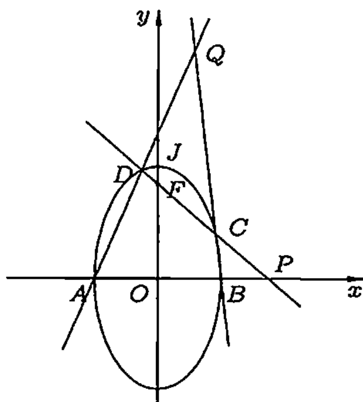


图 3

同时还发现: 设直线 AC 与直线 BD 交于点 Q_1, 直线 AD 与直线 BC 交于点 Q_2, 由推论1有 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ_2}=b^2$, 根据向量投影的定义可知, 直线 Q_1Q_2 垂直于 x 轴.

推论2 设椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 顶点 $A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过其焦点 $F(0,c)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 设直线 AC 与直线 BD 交于点 Q_1, 直线 AD 与直线 BC 交于点 Q_2. 当点 P 异于 A、B 两点时, 则直线 Q_1Q_2 垂直于 x 轴.

将结论1中"过焦点 $F(0,c)$ 的直线 l"推广为"过 y 轴上任意一点 $T(0,n)$ $(n\neq0)$ 的直线 l", 结论是否成立?

结论2 设椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$, 顶点 $A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过点 $T(0,n)$ $(n\neq0)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q, 如图4. 当点 P 异于 A、B 两点时, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 为定值.

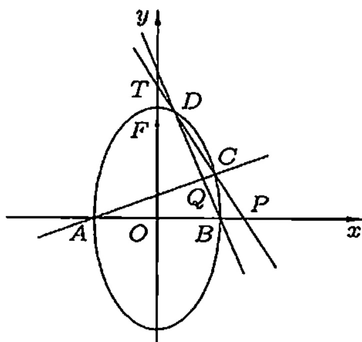


图 4

证明: 若直线 l 垂直于 x 轴时, 不符合题意;

若直线 l 不垂直于 x 轴时, 设直线 l 的斜率为 k, 则直线 l 方程为 $y=kx+n$ ($k\neq0$ 且 $k\neq\pm\dfrac{n}{b}$), 所以 P 点的坐标为 $\left(-\dfrac{n}{k},0\right)$.

联立直线和椭圆的方程, 则 $\begin{cases}y=kx+n,\\ \dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1.\end{cases}$

化简得 $(a^2+b^2k^2)x^2+2b^2nkx+n^2b^2-a^2b^2=0$.

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$、$Q(x_0,y_0)$, 有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{2b^2nk}{a^2+b^2k^2},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{n^2b^2-a^2b^2}{a^2+b^2k^2}.\end{cases}$$

由 A、Q、C 三点共线, 有 $\dfrac{y_0}{x_0+b}=\dfrac{y_1}{x_1+b}$; 由 B、Q、D 三点共线, 有 $\dfrac{y_0}{x_0-b}=\dfrac{y_2}{x_2-b}$.

消去 y_0, 得 $\dfrac{x_0+b}{x_0-b}=\dfrac{x_1+b}{x_2-b}\cdot\dfrac{y_2}{y_1}$, 因为 $-b<x_1$、$x_2<b$, $\dfrac{x_1+b}{x_2-b}<0$, 所以 $\dfrac{x_0+b}{x_0-b}$ 与 $\dfrac{y_2}{y_1}$ 异号, 因为

$$\left(\frac{x_0+b}{x_0-b}\right)^2=\left(\frac{x_1+b}{x_2-b}\right)^2\cdot\frac{y_2^2}{y_1^2}$$

$$=\left(\frac{x_1+b}{x_2-b}\right)^2\cdot\frac{b^2-x_2^2}{b^2-x_1^2}$$
$$=\frac{(b+x_1)(b+x_2)}{(b-x_1)(b-x_2)}$$
$$=\frac{b^2+(x_1+x_2)b+x_1x_2}{b^2-(x_1+x_2)b+x_1x_2}$$
$$=\frac{b^2-\frac{2b^3nk}{a^2+b^2k^2}+\frac{n^2b^2-a^2b^2}{a^2+b^2k^2}}{b^2+\frac{2b^3nk}{a^2+b^2k^2}+\frac{n^2b^2-a^2b^2}{a^2+b^2k^2}}$$
$$=\left(\frac{kb-n}{kb+n}\right)^2.$$

又 $y_1y_2=k^2x_1x_2+kn(x_1+x_2)+n^2=\frac{a^2(n-kb)(n+kb)}{a^2+b^2k^2}$, 则 $\frac{y_2}{y_1}$ 与 $\frac{kb-n}{kb+n}$ 异号,

所以 $\frac{x_0+b}{x_0-b}$ 与 $\frac{kb-n}{kb+n}$ 同号,

则 $\frac{x_0+b}{x_0-b}=\frac{kb-n}{kb+n}$, 解得 $x_0=-\frac{kb^2}{n}$. 因此 $Q\left(-\frac{kb^2}{n},y_0\right)$, 所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{n}{k},0\right)\cdot\left(-\frac{kb^2}{n},y_0\right)=b^2$ 为定值.

将结论2中"过 y 轴上任意一点 $T(0,n)$ 的直线 l"推广为"过平面上任意一点 $M(s,t)$ 的直线 l", 同时椭圆的焦点不一定在 y 轴上, 结论是否成立?

结论3 设椭圆方程为 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, 顶点 $A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过点 $M(s,t)$ 的直线 l 与椭圆交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q, 如图5. 当点 P 异于 A、B 两点时, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 为定值.

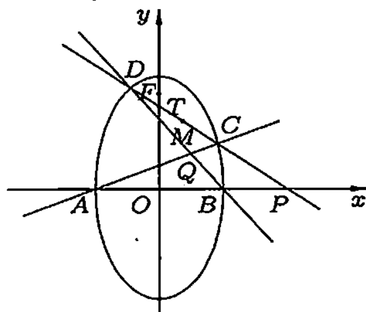


图 5

证明: (1) 若直线 l 垂直于 x 轴时, 则 $P(s,0)$. 设 $C(s,y_1)$、$D(s,-y_1)$、$Q(x_0,y_0)$, $s\neq\pm b$, 由 A、B、C 三点共线, 有 $\frac{y_0}{x_0+b}=\frac{y_1}{s+b}$;

由 B、Q、D 三点共线, 有 $\frac{y_0}{x_0-b}=\frac{-y_1}{s-b}$, 消去 y_0, 得 $\frac{x_0+b}{x_0-b}=-\frac{s+b}{s-b}$, 解得 $x_0=\frac{b^2}{s}$.

因此, $Q\left(\frac{b^2}{s},y_0\right)$, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(s,0)\cdot\left(\frac{b^2}{s},y_0\right)=b^2$ 为定值.

(2) 若直线 l 平行于 x 轴时, 不符合题意;

(3) 若直线 l 既不平行于 x 轴、又不垂直于 x 轴时, 设直线 l 交 y 轴于 $T(0,n)$, 仿结论2的证明方法可以证明 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 为定值.

综上所述, 结论成立.

将结论3中的"椭圆"改为"双曲线", 结论仍然成立, 有兴趣的读者可自行证明.

结论4 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1\,(a、b>0)$, 顶点 $A(-b,0)$、$B(b,0)$, 过点 $M(s,t)$ 的直线 l 与双曲线交于 C、D 两点, 并与 x 轴交于点 P, 直线 AC 与直线 BD 交于点 Q, 如图6、7. 当点 P 异于 A、B 两点时, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=b^2$ 为定值.

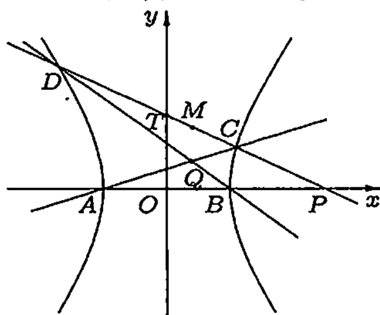


图 6

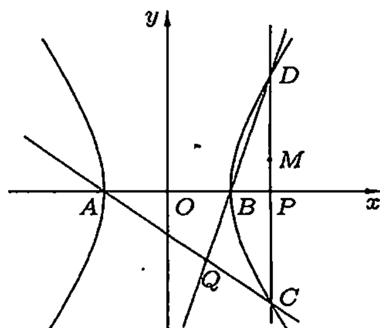


图 7

由一道高考题引发的研究

663300　云南省广南县一中　王邴图

2011年高考全国卷(必修+选修Ⅱ)理科第(15)、文科第(16)题是:

设P为双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$上的一点,点$E$、$F$分别是双曲线的左、右焦点,$\angle EPF$的平分线交$EF$于点$M(2,0)$,则$|PF|=$______(以下简称问题).

该问题把双曲线的焦半径、焦点和三角形的内角平分线联系起来,问题本身并不难,但是设计新颖,难易适中,涉及知识面广,值得我们深入研究,更是研究性学习的好素材.

1. 问题的推广

如果我们将其作推广,进行研究,则可得到如下简洁有趣的结论.

定理1　点$E(-c,0)$、$F(c,0)$分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$或双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的左、右焦点,$P$是椭圆或双曲线上的一点,$\angle EPF$的平分线交$EF$于点$B(x_0,0)$,则

(1)对于椭圆,

$$|PE|=a\left(1+\frac{x_0}{c}\right),\ |PF|=a\left(1-\frac{x_0}{c}\right);$$

(2)对于双曲线,

$$|PE|=a\left|1+\frac{c}{x_0}\right|,\ |PF|=a\left|1-\frac{c}{x_0}\right|.$$

证明:因为$E(-c,0)$、$B(x_0,0)$、$F(c,0)$,由三角形内角平分线性质知

$$\frac{|PE|}{|PF|}=\frac{|EB|}{|BF|}=\frac{x_0-(-c)}{c-x_0}=\frac{x_0+c}{c-x_0}.\ \cdots\cdots ①$$

(1)由椭圆定义得$|PE|+|PF|=2a.\cdots\cdots ②$

联立①和②,解得

$$|PE|=a+\frac{x_0}{e},\ |PF|=a-\frac{x_0}{e}.$$

(2)由双曲线定义得$|PE|-|PF|=2a,\cdots ③$

或得$|PE|-|PF|=-2a,\ \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

联立①和③,解得

$$|PE|=a\left(\frac{c}{x_0}+1\right),\ |PF|=a\left(\frac{c}{x_0}-1\right);$$

联立①和④,解得

$$|PE|=-a\left(\frac{c}{x_0}+1\right),\ |PF|=-a\left(\frac{c}{x_0}-1\right).$$

所以,$|PE|=a\left|1+\frac{c}{x_0}\right|,\ |PF|=a\left|1-\frac{c}{x_0}\right|.$

2. 问题的引申

若将内角平分线引申为外角平分线进行研究,则可得到如下结论.

定理2　点$E(-c,0)$、$F(c,0)$分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$或双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的左、右焦点,$P$是椭圆或双曲线上的一点,$\angle EPF$的外角平分线交$EF$于点$B(x_0,0)$,则

(1)对于椭圆,

$$|PE|=a\left(1+\frac{c}{x_0}\right),\ |PF|=a\left(1-\frac{c}{x_0}\right);$$

(2)对于双曲线,

$$|PE|=a\left|1+\frac{x_0}{c}\right|,\ |PF|=a\left|1-\frac{x_0}{c}\right|.$$

证明:因为$E(-c,0)$、$F(c,0)$,不妨设$B(x_0,0)$位于点F右侧,由三角形外角平分线性质知

$$\frac{|PE|}{|PF|}=\frac{|EB|}{|BF|}=\frac{x_0-(-c)}{x_0-c}=\frac{x_0+c}{x_0-c}.\cdots\cdots ①$$

(1)由椭圆定义得$|PE|+|PF|=2a.\cdots\cdots ②$

联立①和②,解得

$$|PE|=a\left(1+\frac{c}{x_0}\right),\ |PF|=a\left(1-\frac{c}{x_0}\right).$$

(2)由双曲线定义得$|PE|-|PF|=2a.\cdots ③$

或得$|PE|-|PF|=-2a.\ \cdots\cdots\cdots\cdots ④$

联立①和③,解得

$$|PE|=a\left(\frac{x_0}{c}+1\right),\ |PF|=a\left(\frac{x_0}{c}-1\right);$$

联立①和④,解得

$$|PE|=-a\left(\frac{x_0}{c}+1\right),\ |PF|=-a\left(\frac{x_0}{c}-1\right).$$

所以, $|PE|=a\left|1+\frac{x_0}{c}\right|$, $|PF|=a\left|1-\frac{x_0}{c}\right|$.

3. 问题的再引申

若将$\triangle EPF$的角平分线与EF交点的横坐标x_0引申为$\triangle EPF$的内心和旁心的横坐标进行研究, 则可得到简洁优美的结论.

定理3 点$E(-c,0)$、$F(c,0)$分别是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$或双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$的左、右焦点, P是椭圆或双曲线上的一点.

(1) 对于椭圆, $\triangle EPF$的内心A的横坐标为x_0, 则

$|PE|=a+x_0$, $|PF|=a-x_0$;

(2) 对于双曲线, $\triangle EPF$的旁心A的横坐标为x_0, 其中PA平分$\angle EPF$的外角, 则

$|PE|=|a+x_0|$, $|PF|=|a-x_0|$.

证明: (1) 因为内心为$A(x_0,y)$, 由对称性, 不妨设点P在x轴的上方, PA与x轴相交于点B, 由三角形内角平分线性质知

$$\lambda=\frac{|BA|}{|AP|}=\frac{|EB|}{|EP|}=\frac{|FB|}{|FP|}=\frac{|EB|+|FB|}{|PE|+|PF|}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e,$$

故由题意及椭圆焦半径公式得

$$|PF|=\frac{|FB|}{e}=\frac{1}{e}(c-x_B)=a-\frac{x_B}{e}=a-ex_P\Longrightarrow x_B=e^2x_P,$$

由定比分点公式得

$$x_A=\frac{x_B+\lambda x_P}{1+\lambda}=\frac{e^2x_P+ex_P}{1+e}=ex_P\Longrightarrow x_P=\frac{x_A}{e}=\frac{x_0}{e}\Longrightarrow\frac{x_0}{x_P}=e.$$

由椭圆焦半径公式得

$$|PE|=a+ex_P=a+e\cdot\frac{x_0}{e}=a+x_0,$$

$$|PF|=a-ex_P=a-e\cdot\frac{x_0}{e}=a-x_0.$$

(2) 不妨设旁心$A(x_0,y)$是$\angle PEF$的内角平分线和$\angle EPF$、$\angle EFP$的外角平分线的交点, 且点P在x轴的上方, PA与x轴相交于点B, 由三角形内外角平分线性质知

$$\lambda=\frac{|BA|}{|AP|}=\frac{|EB|}{|EP|}=\frac{|FB|}{|FP|}=\frac{|EB|-|FB|}{|PE|-|PF|}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}=e,$$

仿照椭圆的证明方法得$x_P=\frac{x_A}{e}=\frac{x_0}{e}$. 故

$|PE|=|a+ex_P|=|a+x_0|$,

$|PF|=|a-ex_P|=|a-x_0|$.

下面我们看它们的应用.

例1 本文开头提出的问题.

解: 因为$a=3,b=3\sqrt{3}$, $c=6$, $x_0=2$, 由定理1(2)得

$$|PF|=a\left|1-\frac{c}{x_0}\right|=3\left|1-\frac{6}{2}\right|=6.$$

例2 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的左、右焦点分别为点$E$、$F$, P是双曲线上的一点, 已知$\triangle EPF$的旁切圆圆心的横坐标为6, 求$|PE|\cdot|PF|$的值.

解: 因为旁切圆圆心的横坐标$x_0=6$, 而$a=3$, 由题意和定理3(2)得

$|PE|=|a+x_0|=|3+6|=9$,

$|PF|=|a-x_0|=|3-6|=3$,

所以$|PE|\cdot|PF|=27$.

例3 椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为点$E$、$F$, P是椭圆上的一点, 已知$\triangle EPF$的内切圆方程为$2x^2+2y^2-2x+y=0$, 求$\triangle EPF$的面积.

解: 已知圆方程可化为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16},$$

故知其圆心横坐标$x_0=\frac{1}{2}$, 而$a=2$, $|EF|=2c=2$, 由题意和定理3(1)得

$$|PE|=a+x_0=\frac{5}{2},\ |PF|=a-x_0=\frac{3}{2},$$

已知三角形的三边, 由海伦公式得该三角形的面积

$$S=\sqrt{3\left(3-\frac{3}{2}\right)\left(3-\frac{5}{2}\right)(3-2)}=\frac{3}{2}.$$

《数学教学》2011年(总第281–292辑)总目录

第 一 期 目 录

第 二 期 目 录

第 三 期 目 录

第　四　期　目　录

第　五　期　目　录

第六期目录

第七期目录

第八期目录

第九期目录

第十期目录

第十一期目录

第十二期目录

《数学教学》编辑委员名单

编后漫笔

有感于刘佛年先生的"兼容并包"

张奠宙　赵小平

今年是华东师范大学建校60周年. 凤凰网的一篇相关报道中, 提到华东师范大学前校长刘佛年教授说过的一段话:

"我从旧中国的教育看到新中国的教育, 经历过几十年来的风风雨雨. 教育无非是两种. 一种是讲授式, 教师以高水平、启发式的讲解, 让学生容易接受. 代表人物是赫尔巴特、夸美纽斯和苏联的凯洛夫. 另一种是活动式, 创设情境, 让学生在活动中探索, 主动地获得知识. 代表人物是杜威. 两者各有长短. 那么我们中国应该采取什么态度呢? 那就是兼容并包, 不能走极端. 一般地说, 做学问可以走极端, 以便形成独特的学派. 但是, 指导实际工作、干事, 不能走极端, 真理往往在两个极端的中间."(摘自: 2011-10-15发布的凤凰视频 http://v.ifeng.com/news/society/201110/e3c57bcb-810c-45a8-b1d2-fb623463ea96.shtml)

纵观今日世界的教育理论, 包括数学教育理论, 没有哪一种学说和体制是绝对正确的典范. 整体的走向是根据不同的文化背景和社会需求走向多元化和多极化. 中国, 理应是其中的一极.

任何一次教育改革, 必然会有强调的重点, 不可能四平八稳. 我们不可以片面提倡一种观念, 否定另一种与之对立的、却并非错误的观点, 以一种倾向掩盖另一种倾向. 兼容并包, 才能走出中国自己的道路来.

(上接第1-8页)

从而得出一个一般性的命题:一条直线截抛物线 $y^2=2px$ 所得弦对顶点的张角为 90° 是该直线过定点 $(2p,0)$ 的充要条件, 之后给出相应的推广应用题①、②、③.

该题组通过鼓励学生大胆猜想, 体验发现、获得、推广应用, 激发了学生的求知欲, 培养了学生的问题意识, 发展了学生的创新思维能力.

基于教材例、习题, 我们可以以题组辨析的方式围绕若干方面 (如图6) 设计高质量的题组, 或一题多变或多题归一, 教学要重视在辨析中求变通, 在变通中求创新, 鼓励学生进行"头脑风暴"式的大胆思考, 培养学生主动探索的精神, 从而能在创新中实现学生思维发展的目标, 实现"解放思维"的最高境界.

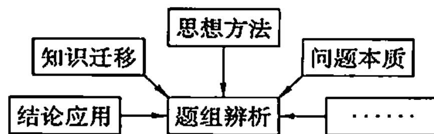


图6

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2012年第1期(总第293期)
名誉主编: 张奠宙
主　编: 赵小平
常务副主编: 忻重义
发行范围: 公　开
电　话: 021-62232712
主管单位: 中华人民共和国教育部
主办单位: 华东师范大学
出　版: 上海《数学教学》杂志社
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 3100720050001
印　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 5.50元　国内统一连续出版物号: CN31-1024/G4　每月12日出版　代号: 4-357